# Correction de la feuille d'exercices (loi binomiale et loi géométrique)

## Exercice I

1. Le fait de choisir une pièce est de regarder si elle est conforme ou non est une épreuve de Bernoulli. On la répète 1 000 fois et on suppose les répétitions indépendantes puisqu'on assimile les tirages à des tirages sans remise.
   Ainsi peut-on modéliser la loi de $X$ par la loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}(1\,000\,;\,0,02)}$.
2. À la calculatrice, on trouve $p(X \leqslant 10) \boxed{\approx 0,010}$.
3. $E(X) = 1\,000 \times 0,02 = \boxed{20}$.
   Dans le lot de 1 000, la valeur espérée est 20.

## Exercice II

- $E(T) = \dfrac{1}{0,01} = \boxed{100}$
- $V(T) = \dfrac{1-0,01}{0,01^2} = \boxed{0,0099}$
- $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{0,0099} \boxed{\approx 0,0995}$

## Exercice III

- $p(X=2) = \boxed{p \times (1-p)}$
- $p(Y=2) = (1-p) \times (1-(1-p)) = \boxed{(1-p) \times p}$

Donc $\boxed{p(X=2) = p(Y=2)}$.

## Exercice IV

1. Le fait de lancer une pièce et de regarder si on obtient « Pile » ou non est une épreuve de Bernoulli. Puisqu'elle est répétée de manière indépendante, la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre d'essais avant d'obtenir « Pile » suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, $p(X=5) = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\dfrac{1}{32}}$.
2. La loi géométrique étant sans mémoire, la question posée revient à déterminer :
   $p_{X=13}(X=18) = p(X=5) = \boxed{\dfrac{1}{32}}$.

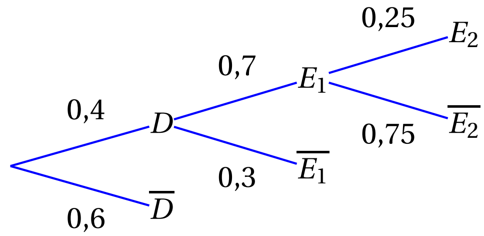
## Exercice V

1. Le fait qu'un client se présente ou non à l'embarquement est une épreuve de Bernoulli. Elle est répétée 350 fois de manière indépendante.
   Ainsi, X suit-elle la loi binomiale de paramètres $n = 350$ et $p = 0,94$.
2. $E(X) = 350 \times 0,94 = 329$ et $\sigma(X) = \sqrt{350 \times 0,94 \times 0,06} = \sqrt{19,74} \approx \boxed{4,443}$.
3. À l'aide de la calculatrice, on obtient :
   $p(X < 330) = p(X \leqslant 329) \approx \boxed{0,532}$.

4. La première valeur de $n$ pour laquelle $p(X > 350) \geqslant 0,01$ est $\boxed{n = 363}$.
La compagnie, pour rentabiliser la ligne et limiter les risques liés au surbooking à 1,4 %, peut vendre jusqu'à 363 billets.

## Exercice VI  Métropole juin 2012

1. (a)




(b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :

$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$.

D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.

On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :

$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.

D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable $X$ suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

(b) On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à $10^{-3}$ près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec $n$ candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à :

$\binom{0}{n} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des $n$ candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.

Deux possibilités :

- À la calculatrice, en utilisant la fonction $f :: x \mapsto 1 - 0,93^x$ et en faisant varier $x$ par pas de 1 (ou d'abord par pas de 5, puis en affinant par pas de 1...)
  On trouve $\boxed{n \geqslant 96}$
- On peut résoudre l'inéquation à laide d ela fonction logarithme népérien ln, mais pas encore étudiée :
  $1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
  Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
  Il faut donc traiter **au moins 96** dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.