Correction de la feuille d'exercices sur les équations différentielles

Équations différentielles

Exercice I

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction f donnée est solution de l'équation différentielle (E) donnée :

a) $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ et $(E)\ :\ y' = 6x - 2$
$f'(x) = 6x - 2$ donc f est solution de (E).

b) $g : x \mapsto \ln(x) + 2$ et $(E)\ :\ y' = \dfrac{1}{x}$
$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc g est solution de (E).

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^x + x$ et $(E)\ :\ y' = \mathrm{e}^x + 1$
$h'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ donc h est solution de (E).

Exercice II

Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 3x^2 - 5$
$\boxed{y(x) = x^4 3 - 5x + k,\ k \in \mathbb{R}}$

b) $y' = \mathrm{e}^x + 3$
$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^x + 3x + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

c) $y' = -3\mathrm{e}^{-3x} + 7$
$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{-3x} + 7x + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

Exercice III

Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = x^2 - 5x + 3$ et $y(0) = 2$
$y(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + k,\ k \in \mathbb{R}$.
$y(0) = 2 \Leftrightarrow k = 2$ donc la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0) = 2$ est :
$\boxed{y(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + 2}$.

b) $y' = \mathrm{e}^x + 1$ et $y(0) = 3$
$y(x) = \mathrm{e}^x + x + k$.
$y(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + k = 3 \Leftrightarrow k = 2$ donc :
$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^x + x + 2}$.

c) $y' = \mathrm{e}^{3x+2}$ et $y(0) = 1$
$y(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2} + k,\ k \in \mathbb{R}$.
$y(0) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^2 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \mathrm{e}^2$.
Par conséquent : $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2} + 1 - \mathrm{e}^2}$.

Primitives

Exercice IV

Trouver dans chaque cas, toutes les primitives de la fonction proposée sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = 6$ sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{F(x) = 6x + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

b) $g(x) = 5x + 3$ sur $\mathbb{R}$
$\boxed{G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 3x + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

c) $h(x) = 3\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{H(x) = 3\mathrm{e}^x + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

d) $k(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
$\boxed{K(x) = \ln(x) + k,\ k \in \mathbb{R}}$.

Exercice V

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 12x - 5$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est : $\boxed{F(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 5x}$

2. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2}$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est : $F(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - 5 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \boxed{-\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}$

Exercice VI

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = \ln(x)$.

1. $F(x) = x\ln(x) - x$.
$F = u - u$ avec $\begin{cases} u(x = x \\ v(x) = \ln(x)) \end{cases}$.
$F' = u'v + uv' - u'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$.
$F'(x) = 1 \times \ln(x) = x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$ donc F est bien solution de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$.

2. F est donc une primitive de $f :: x \mapsto \ln(x)$.
Toutes les primitives sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{x \mapsto x\ln(x) + x + k,\ k \in \mathbb{R}}$

3. L'unique primitive G de f vérifiant $G(1) = 2$ est $G(x) = x\ln(x) - x + k$.
$G(1) = 2 \Leftrightarrow -1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3$ car $\ln(1) = 0$.
$\boxed{G(x) = x\ln(x) - x + 3}$.

Exercice VII

Dans chaque cas, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné :

a) $F(x)=x^4-2x^3+5x^2-7x+2$ et $f(x)=4x^3-6x^2+10x-7$ sur $\mathbb{R}$.
$F'(x)=4x^2+2\times 3x^2+5\times 2x-7=4x^3-6x^2+10x-7=f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

b) $F(x)=x^2+2\sqrt{x}$ et $f(x)=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

$F'(x)=2x+\cancel{2}\times\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

c) $F(x)=\dfrac{3x-2}{5x+7}$ et $F(x)=\dfrac{31}{(5x+7)^2}$ sur $\left]-\dfrac{7}{5}\,;\,+\infty\right[$

$F=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=3x-2\\ v(x)=3x+7\end{cases}$.

$F'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases}u'(x)=3\\ v'(x)=5\end{cases}$.

Alors : $F'(x)=\dfrac{3(5x+7)-5(3x-2)}{(5x+7)^2}=\dfrac{14x+21-15x+6}{(5x+7^2)}=\dfrac{31}{(5x+7)^2}=f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

d) $F(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-5}$ et $F(x)=\mathrm{e}^{3x-5}$ sur $\mathbb{R}$.

$F'(x)=\dfrac{1}{3}\times\left[3\mathrm{e}^{3x-5}\right]=\mathrm{e}^{3x-5}=f(x)$ donc F est bien une primitive de f.

Exercice VIII VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, indiqué si elle est vrai ou fausse et justifier la réponse?.

a) La fonction carré est une primitive de la fonction $x\mapsto 2x$.
VRAI : Si $F(x)=x^2$, $F'(x)=2x$.

b) La fonction carré est une primitive de la fonction $x\mapsto 2x+1$.
FAUX : SI $F(x)=x^2$, $F'(x)=2x\neq 2x+1$.

c) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction $x : x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

FAUX : La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet pour primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction $x\mapsto\ln(x)$.

d) La fonction $x\mapsto x^3-x^2-\mathrm{e}^{-x}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto 3x^2-2x+\mathrm{e}^{-x}$ qui vaut -1 en 0.
Posons $f(x)=3x^2-2x+\mathrm{e}^{-x}$.
Les primitives sont les fonction $F : x\mapsto x^3-x^2+\mathrm{e}^{-x}+k,\ k\in\mathbb{R}$?
$F(0)=-1\Leftrightarrow 1+k=-1\Leftrightarrow k=-2$.
La fonction $x\mapsto x^3-x^2-\mathrm{e}^{-x}$ est bien une primitive de la fonction f mais ne vaut pas -1 en 0.

Exercice IX

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
$f(x)=\sqrt{x}$.

Soit $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

$F'(x)=\dfrac{2}{3}\left[1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\dfrac{2}{3}\left[1\times\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right]=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{3}\sqrt{x}}{\cancel{2}}=\sqrt{x}$ donc F est bien une primitive de f.

Équations différentielles $y' = ay + b$

Exercice X

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 4y = 0 \Leftrightarrow y' = 4y \Leftrightarrow y' = ay$ avec $a = 4$.
Les solutions sont les fonctions $\boxed{f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{4x},\ k \in \mathbb{R}}$.

b) $5y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{4}{y} \Leftrightarrow y' = ay$ avec $a = -\dfrac{4}{5}$ Les solutions sont les fonctions $\boxed{f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}x},\ k \in \mathbb{R}}$.

c) $y' = -4y + 3$

d) $y' = \dfrac{1}{3}y - 1 \Leftrightarrow y' = ay + b$ avec $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$.
Les solutions sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a},\ k \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{f_k(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + 3}$

Exercice XI

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte de la condition initiale proposée :

a) $y' = 3y$ et $y(0) = 1$
On a une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = 3$.
Les solutions sont les fonctions $\boxed{y : x \mapsto k\mathrm{e}^{3x},\ k \in \mathbb{R}}$.
$y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$ donc $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{3x}}$

b) $y' = -2y$ et $y(0) = -1$.
On a une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = -2$.
Les solutions sont les fonctions $\boxed{y : x \mapsto k\mathrm{e}^{2x},\ k \in \mathbb{R}}$.
$y(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$ donc $\boxed{y(x) = -\mathrm{e}^{-2x}}$

c) $y' - 2y - 1 = 0$ et $y(0) = 1$.
$' - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = 2y + 1$ On a une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.
Les solutions sont les fonctions $\boxed{y : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a},\ k \in \mathbb{R}} = k\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{2}$.
$y(0) = 1 \Leftrightarrow k - \dfrac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{2}$ donc $\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{2x} + \dfrac{3}{2}}$