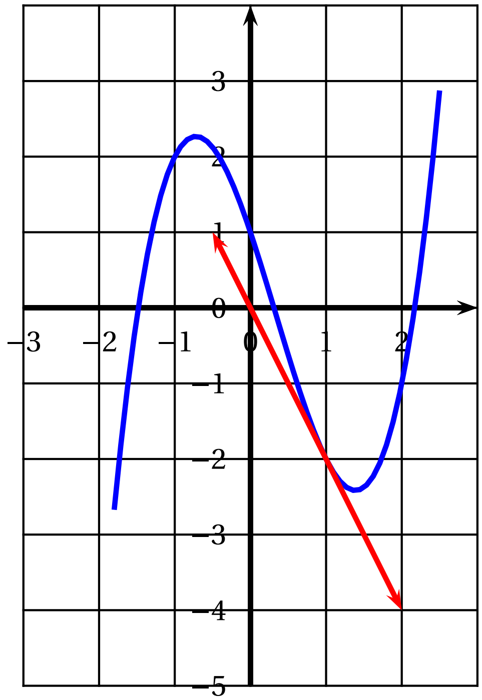
Exercices sur la dérivation (1)

Exercice I

Une fonction f est représentée ci-dessous, ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.



$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente en 1.
Celle-ci passe par les points A et Bde coordonnées $A(0\ ;\ 0)$ et $B(1\ ;\ -2)$.
Alors : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-0}{1-0} = -2$; $\boxed{f'(1) = -2}$

Exercice II

1. Fait en cours.
2. L'équation réduite de la tangente en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Ici : $a = 2$
   $f(2) = \dfrac{1}{2}$.
   $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.
   L'équation est alors : $y = -\dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{2}$ donc $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$ d'où $\boxed{y = -\dfrac{1}{4}x + 1}$

Exercice III

h est une fonction dérivable en -3 telle que $h(-3) = 5$ et $h'(-3) = -3$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de h en -3 est :
$y = h'(-3(x-(-3))) + h(-3)$ donc $y = -3(x+3) + 5$ d'où : $\boxed{y = -3x - 4}$

Exercice IV

f est une fonction dérivable en 8. Dans une repère, la tangente à la courbe en 8 a pour équation $y = 0,5x - 3$.
$f'(8)$ est le coefficient directeur de la tangente donc $\boxed{f'(8) = 0,5}$.
En 8, la courbe et la tangente ont un point commun, donc $f(8) = 0,5 \times 8 - 3 = 4 - 3 = 1$: $\boxed{f(8) = 1}$.

Exercice V

On pose $f(x) = x^3 - x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 2.

Exercice VI

On pose $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$, où $x \in \left]\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$.

1. $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 4x - 1$.
   Alors : $f' = \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 4$.
   On en déduit : $\boxed{f'(x) = -\dfrac{4}{(4x-1)^2}}$.
2. On cherche l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\dfrac{3}{4}$.
   $f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{4}{\left(4 \times \frac{3}{4} - 1\right)^2} = -\dfrac{4}{2^2} = -1$; $f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = -1$.
   $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.
   L'équation de la tangente est :
   $y = f'\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) + f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ donc :
   $y = -\left(x - \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$ d'où $y = -x + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{y = -x + \dfrac{5}{4}}$.

Exercice VII

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = 2x^3 - x - 1.$$

1. $k'(x) = 2 \times 3x^2 - 1 = \boxed{6x^2 - 1}$.
   Alors : $k'(0) = -1$.
2. L'équation réduite de la tangente en 0 est;
   $y = k'(0)(x - 0) + k(0) \Leftrightarrow \boxed{y = -x - 1}$

Exercice VIII

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x) = x\sqrt{x}$.

$f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

$f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

Alors : $f'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x + x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}}$

b) $f(x) = -5x^3 e^x$

$f'(x) = -15x^2 e^x + \left(-5x^3\right) e^x = \left(-15x^2 - 5x^3\right) e^x = \boxed{-5x^2(x+3)e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x}{(x+1)^2} = 4 \times \dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 4\left[\dfrac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4}\right] = 4 \times \left[\dfrac{(x+1)(-x+1)}{(x+1)^4}\right] = \boxed{-\dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}}$

d) $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+4}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{7}{(5x+4)^2}}$