Correction de la feuille d'exercices (dérivation) nº 3

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 11x + 12$.

1. f est dérivable comme fonction polynôme (ou somme et produit de fonction dérivables).
   $f'(x) = 5 \times 2x - 11 = \boxed{10x - 11}$
2. • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{10}$
   • $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{10}{11}$ (en résolvant l'inéquation ou en remarquant que la fonction f' est affine croissante, puisque son coefficient directeur est positif.)
3. **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$\frac{10}{11}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{742}{121}$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites à l'infini se trouvent en mettant x^2 en facteur.

Exercice II

Soit h la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $h(x) = 7 - \dfrac{10}{5 - x}$.

1. h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.
   $h(x) = 7 - 10 \times \dfrac{1}{5 - x}$ donc $h = 7 - 10 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 5 - x$.
   On en déduit : $h' = 0 - 10 \times \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -10\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$ avec $u'(x) = -1$.
   Par conséquent : $h'(x) = -10 \times \left(-\dfrac{1}{(5-x)^2}\right) = \dfrac{10}{(5-x)^2}$.
2. Pour tout $x \neq 5$, $\boxed{h'(x) > 0}$
3. On en déduit que h est croissante sur $]-\infty\,;\,5[$ et sur $]5\,;\,+\infty[$.

Exercice III

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 56x - 24$.

1. g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivabmes(ou comme fonction polynôme).
   $g'(x) = \dfrac{2}{3} \times 3x^2 + 3 \times 2x + 56 = \boxed{2x^2 + 6x + 56}$
2. $g'(x)$ est un trinôme du second degré.
   $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 56 = 36 - 224 < 0$.
   $g'(x)$ est alors du signe du coefficient de x^2, 2, donc positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Pour tout x, $\boxed{g'(x) > 0}$
3. On en déduit que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

g est dérivable comme fonction polynôme.
Pour tout x, $g'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 2 = \boxed{x^2 + 2 > 0}$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice V

Soit $g : x \mapsto 2x^3 + x^2 + 8x - 7$.
g est une fonction polynôme donc dérivable.
Pour tout x, $g'(x) = 2 \times 3x^2 + 8 = 6x^2 + 2x + 8$.
$6x^2 + 2x + 8 = ax^2 + bc + c$ avec $\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ c = 8 \end{cases}$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 6 \times 8 = 4 - 192 < 0$.
Le trinôme du second degré est donc du signe de $a = 6 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
g est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Exercice VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 9x$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   $f'(x) = -4 \times 3x^2 + 9 = -12x^2 + 9 = -3\left(4x^2 - 3\right)$
   $= -3\left[(2x)^2 - \sqrt{3^2}\right] = \boxed{-3\left(2x + \sqrt{3}\right)\left(2x - \sqrt{3}\right)}$.
2. $f'(x)$ a deux racines : $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   $f'(x)$ est un trinôme du second degré qui a deux racines; il est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé à celui de a entre les racines avec $\boxed{a = -3 < 0}$.
   On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Les limites à l'infini s'obtiennent en mettant x^3 en facteur : $f(x) = x^3\left(-4 + \dfrac{9}{x^2}\right)$

3. f admet un maximul local, $3\sqrt{3}$, atteint en $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice VII

Une entreprise fabrique et vend des montres. Elle en produit chaque jour entre 2 et 24.
On note x le nombre de montres produites et vendues par jour.
On appelle $C(x)$ le coût total journalier de fabrication en euros.
La fonction C est définie par $C(x)=x^2-4x+169$.
On appelle **coût unitaire moyen** $C_m(x)$ le coût de fabrication d'une montre lorsqu'on en produit x.
Il est donné par $C_m(x)=\frac{C(x)}{x}$.

1. $\boxed{x\in[2\,;\,24]}$
2. Pour tout $x$de $[2\,;\,24]$, $C_m(x)=\frac{C(x)}{x}$
$=\frac{x^2-4x+159}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{169}{x}=\boxed{x-4+\frac{169}{x}}$
3. C_m est dérivable comme somme et quotient de fonctions dérivables.
$C_m(x)=x-4+169\times\frac{1}{x}$ donc $C'_m(x)=1+169\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$=\boxed{1-\frac{169}{x^2}}$
4. $C'_m(x)=\frac{x^2-169}{x^2}=\frac{(x-13)(x+13)}{x^2}$ qui est du signe du numérateur $(x-13)(x+13)$.
Cette expression a deux racines, -13 et 13; c'est un trinôme du second degré, qui est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé entre les racines.
Tableau de variation :

x	2		13		24
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{161}{4}=40,25$	↘	10	↗	$\frac{11689}{576}\approx 20,3$

5. L'entreprise doit fabriquer 13 montres pour avoir un coût moyen de fabrication minimum.

Exercice VIII

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{D}=\left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$g(x)=\frac{x}{4}+\frac{2}{2x+3}.$$

1. $g(x)=\frac{1}{4}x+2\times\frac{1}{2x+3}$.
$g=\frac{1}{4}u+2\times\frac{1}{v}$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=2x+3$.
$g'=\frac{1}{4}u'+2\times(1)'=\frac{1}{4}u'+2\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=2$.
Par conséquent :
$g'(x)=\frac{1}{(4}-2\times\frac{2}{(2x+3)^2}=\frac{1}{4}-\frac{4}{(2x+3)^2}=\frac{(2x+3)^2-16}{4(2x+3)^2}=\frac{4x^2+12x+9-16}{4(2x+3)^2}=\frac{4x^2+12x-7}{4(2x+3)^2}=\boxed{\frac{x^2+3x-\frac{7}{4}}{4(2x+3)^2}}$
2. On remarque que : $g'(x)=\frac{(2x+3)^2-16}{4(2x+3)^2}=\frac{(2x+3)^2-4^2}{4(2x+3)^2}=\frac{(2x+3+4)(2x+3-4)}{4(2x+3)^2}=\boxed{\frac{(2x+7)(2x-1)}{4(2x+3)^2}}$.
Le dénominateur est positif donc cette fraction est du signe du numérateur.
Celui-ci est un polynôme du second degré. Il s'annule en $-\frac{7}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il et du signe du coefficient de x^2 (4>0) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé entre les racines.

3. **Tableau de variation** :

- On voit « facilement » que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{4}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{2x+3}\right)=0$.
- De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} \left(\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{3}{8}$

  $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} (2x+3) = 0$ avec $2x+3 < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} \left(\dfrac{2}{2x+3}\right) = -\infty$.

  Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2}}} g(x) = -\infty$.

- De même : $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{3}{2}}} = +\infty$ car $(2x+3) > 0$ pour x proche de $-\dfrac{3}{2}$avec $x > -\dfrac{3}{2}$.

On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{11}{8}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : puisque $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} g(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$

Courbe (non demandée) :