

Exercices de bac sur la loi exponentielle

I Polynésie 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ^a (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.

Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999?

Rappel :

Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$, dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement :

$$\text{pour } 0 \leq a \leq b, p([a; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ et}$$

$$\text{pour } c \geq 0, p([c; +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

II Métropole septembre 2014 (Extrait)

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

(a) Déterminer la valeur de λ .

(b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4} .

(c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4} .

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

Préciser, en fonction de n , les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y , son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.