

Correction de la feuille d'exercices de bac sur la loi exponentielle

Exercice I

1. On a $P(X > 10) = 0,286 = e^{-10\lambda}$, équation qui donne $\lambda = 0,125$ au centième près.
Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,125$.
2. La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois s'écrit $P(X \leq 0,5)$.
 $P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,5 \times 0,125} = 1 - e^{-0,0625} \approx 0,061$
3. L'appareil a déjà fonctionné 8 années; la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donnée par : $P(X > 8 | X > 10)$ avec $P(X > 8) = e^{-8 \times 0,125}$.
 $P((X > 10) \cap (X > 8)) = P(X > 10) = e^{-10 \times 0,125}$.

$$P(X > 8 | X > 10) = \frac{P(X > 10)}{P(X > 8)} = e^{-2 \times 0,125} :$$

$$P(X > 2) \approx 0,779$$

4. On est en présence d'un schéma de Bernoulli. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils.

Le responsable a commandé 15 oscilloscopes. La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est la probabilité d'un « succès » et on sait qu'elle vaut $P(X > 10) = 0,286$.

L'événement « au moins un oscilloscope parmi les 15 a une durée de vie supérieure à 10 ans » est l'événement contraire de « tous les appareils ont une durée de vie inférieure à 10 ans » de probabilité $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.

La probabilité qu'au moins un oscilloscope parmi les 15 ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donc $1 - 0,714^{15} \approx 0,779$.

5. On reprend la situation de la question précédente avec n oscilloscopes et on cherche n tel que $1 - 0,714^n \geq 0,999$ inéquation équivalente à $0,714^n \leq 10^{-3}$ et qui donne $n \geq \frac{\ln(10^{-3})}{\ln 0,714} \approx 20,5$.

L'établissement devrait acheter 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999

Exercice II

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

- (a) Le temps moyen d'attente est de 10 minutes donc $E(X) = 10$; or $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{1}{10} = 0,1$.

- (b) La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes est $P(10 \leq X \leq 20)$.

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre 0,1 on sait que :

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 20) &= \int_{10}^{20} 0,1 e^{-0,1t} dt = [-e^{-0,1t}]_{10}^{20} \\ &= -e^{-2} + e^{-1} \approx 0,2325 \end{aligned}$$

- (c) Un client attend depuis 10 minutes. La probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes, sachant qu'il a déjà attendu 10 minutes; c'est-à-dire : $P_{X \geq 10}(X \geq 15)$

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » ou « loi sans mémoire » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{X \geq t}(X \geq s + t) = P(X \geq s)$.

On en déduit que $P_{X \geq 10}(X \geq 15) = P(X \geq 5)$.

On sait que, pour une loi exponentielle de paramètre λ , $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$ donc

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-0,1 \times 5} = 1 - e^{-0,5}; P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$= 1 - (1 - e^{-0,5}) = e^{-0,5} \approx 0,6065$$

La probabilité cherchée est 0,6065.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

- (a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

Une variable aléatoire suivant la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique np et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

$$\text{Donc } E(Y) = n \times 0,8 = 0,8n \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$$