Mathématiques complémentaires : correction des exercices sur les variations de suites (feuille 1bis)

Exercice I

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n - n - 2$.
Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = -n - 2 < 0$ donc la suite est **décroissante**.

Exercice II

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$.

1) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2} - \dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{n^2\left[(n+1)^2+1\right] - (n+1)^2\left(n^2+1\right)}{2n^2(n+1)^2}$

$= \dfrac{n^2\left(n^2+2n+2\right) - \left(n^2+2n+1\right)\left(n^2+1\right)}{2n^2(n+1)^2} = \dfrac{n^4+2n^3+2n^2-\left[n^4+n^2+2n^3+2n+n^2+1\right]}{2n^2(n+1)^2}$

$= \dfrac{n^4+2n^3+2n^2-n^4-n^2-2n^3-2n-n^2-1}{2n^2(n+1)^2} = \boxed{\dfrac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2}} < 0$ donc (u_n) est **décroissante**

2) Pour tout n, $u_n - 1 = \dfrac{n^2+1}{2n^2} - 1 = \dfrac{n^2+1-2n^2}{2n^2} = \dfrac{1-n^2}{2n^2} \leqslant 0$ pour $n \geqslant 1$, donc $\boxed{u_n \leqslant 1}$

Exercice III

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2-n}{2+n}$.
Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2-(n+1)}{2+(n+1)} - \dfrac{2-n}{2+n} = \dfrac{1-n}{3+n} - \dfrac{2-n}{2+n} = \dfrac{(1-n)(2+n)-(3+n)(2-n)}{(2+n)(3+n)}$
$\dfrac{2+n-2n-n^2-\left[6-3n+2n-n^2\right]}{(3+n)(2+n)} = \boxed{\dfrac{-4}{(3+n)(2+n)} < 0}$; (u_n) est décroissante.

Exercice IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.
Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \left(n+1+\dfrac{1}{n+1}\right) - \left(n+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1} - \left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = \dfrac{n\left[n^2+2n+2\right]-(n+1)\left(n^2+1\right)}{n(n+1)}$
$= \dfrac{n^3+2n^2+2n-n^3-n-n^2-1}{n(n+1)} = \boxed{\dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}}$
Étudions le signe de n^2+n-1.
$\Delta = 5 > 0$.
Il y a deux racines : $n_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $n_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6$.
n^2+n-1 est donc positif pour $n > n_2$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 1$.
La suite est **croissante**.

Exercice V

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

1)
- $u_1 = u_0 + 0 - 3 = -3$
- $u_2 = u_1 + 2 - 3 = -4$
- $u_3 = u_2 + 4 - 3 = \boxed{-3}$

2) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$ et $2n - 3 \geqslant 0 \iff n \geqslant \dfrac{3}{2} = 1,5$.
Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ à partir de $h = 2$.
La suite est **croissante** à partir de $n = 2$.

Exercice VI

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 2$.

1) Montrer que, pour tout x réel,
$(x-1)^2 + 1 = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = x^2 - 2x + 2$ donc
$\boxed{x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + 1}$

2) Pour tout n : $u_{n+1} - u_n = \left(u_n^2 - u_n + 2\right) - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2$
$= (u_n - 1)^2 + 1 > 0$ puisque le carré d'un réel est positif.
La suite est donc **croissante**.