Correction des exercices sur les sommées de termes consécutifs

Exercice I

On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison 2.

$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{34} = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$ avec $n = 34$.

Donc $S = 35 \times 3 + \dfrac{34 \times 35}{2} \times 2 = 105 + 1\,190 = \boxed{1\,295}$.

Exercice II

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

$S = u_{11} + u12 + \cdots + u25$.

On sait que $u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$.

Alors : $S = (25 - 11 + 1) \times \dfrac{u_{11} + u_{25}}{2}$

$= 15 \times \dfrac{\left(2 + 11 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 + 25 \times \frac{1}{4}\right)}{2} = 15 \times \dfrac{13}{2} = \boxed{\dfrac{195}{2}}$.

Exercice III

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

La somme S des 100 premiers termes est :

$S = u_0 + \cdots + u_{99} = u_0 \times \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ avec $u_0 = 2$, $q = 2$ et $n = 99$.

$S = 2 \times \dfrac{2^{100} - 1}{2} = \boxed{2^{100} - 1}$.

$\boxed{S = 1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,375.}$.

$\boxed{S \approx\approx 1{,}27 \times 10^{30}}$.

Exercice IV

En 2012, un artisan batelier a transporté 300 tonnes de marchandises sur sa péniche.

Il augmente sa cargaison chaque année de 11 % par rapport à l'année précédente.

On modélise alors la quantité en tonnes de marchandises transportées par l'artisan batelier par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n est la quantité en tonnes de marchandises transportées en $(2012 + n)$.

Ainsi . $u_0 = 300$.

1. (a) Le taux d'augmentation est $t = 11\,\%$.
   Le coefficient multiplicateur associé est : $C = 1{,}11$.
   Pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}11 u_n$.
   La suite (u_n) est géométrique de raison
   $q = 1{,}11$ et de premier terme $u_0 = 300$.

   (b) Par conséquent, pour tout entier naturel n , on a . $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 1{,}11^n}$.

   (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant, écrit en langage Python, afin de déterminer en quelle année il devra changer de péniche :

```
u = 300
n = 0
while u<1000 :
u = u * 1.11
n = n + 1
```

(b) $u_{11} \approx 946 < 1\,000$ et $u_{12} \approx 1\,049 > 1\,000$.
Par conséquent, le batelier changera de péniche en 2024.

2. Une tonne transportée est payée au batelier 15 €.
Le chiffre d'affaires total entre 2012 et 2019 est :
$15\,(u_0 + u_1 + \cdots + u_7) = 15 \times 300 \times \dfrac{1,11^8 - 1}{1,11 - 1}$
$\boxed{\approx 53\,367 < 70\,000}$.
La proposition est donc **fausse**.

Exercice V

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.
À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées.
L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 2 000 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en $2019 + n$.

1) 2020 correspond à u_1.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 20 % est égal à $C = 1 + t = 1 - 20\,\% = 0;8$.
$u_1 = 0,8u_0 + 2\,000 = 0,8 \times 600 + 2\,000 = \boxed{2\,480}$.

2) • $\boxed{u_0 = 600}$
 • $\boxed{u_1 = 2\,480}$

3) Pour tout n, $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n + 2\,000}$

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 10\,000$.
 a) Pour tout n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_n - 10\,000 \\ &= 0,8u_n + 2\,000 - 10\,000 \\ &= 0,8u_n - 8\,000 \\ &= 0,8\,(u_{-}10\,000) \\ &= \boxed{0,8v_n} \end{aligned}$$

 (v_n) est **géométrique**, de raison $q\boxed{= 0,8}$.
 b) $v_0 = u_0 - 10\,000 = 600 - 10\,000 = -9\,400$; $\boxed{v_0 = -9400}$.
 c) On en déduit : $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\boxed{v_n = -9400 \times 0,8^n}$
 d) $v_n = u_n - 10\,000$ donc $u_n = 10\,000 + v_n = \boxed{10\,000 - 9400 \times 0,8^n}$
 e) 1050 correspond à $\boxed{n = 31}$.
 $u_{31} = 10\,000 - 9400 \times 0,8^{31} \approx \boxed{9\,990}$.
 En 2050, il y aura environ 9 990 abonnés.