Graphes pondérés ou étiquetés

Activités 2 ; 3 et 4 page 269

I Chaîne de poids minimum entre deux sommets

1 Définitions :

Définitions

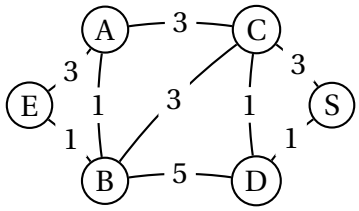
- **Longueur d'une chaîne** : nombre d'arêtes qui la composent.
- **Distance entre deux sommets :** plus petite longueur des chaînes reliant ces deux sommets
- **diamètre d'un graphe :** plus grande distance constante constatée entre deux sommets parmi toutes les paires de sommets
- **Poids d'une arête :** Nombre positif qui lui est affecté (quelle que soit sa signification)
- **Poids d'une chaîne :** somme des poids des arêtes qui la composent.
- **« Plus courte chaîne »ou chaîne minimale entre deux sommets donnés :** chaîne de poids minimal, parmi toutes celles qui relient ces deux sommets.

Remarque : ne pas confondre longueur d'une chaîne et son poids.

2 Recherche d'une chaîne de poids minimum : algorithme de Dijkstra

Lorsqu'un graphe pondéré comporte de nombreux sommets et de nombreuses arêtes, la recherche d'une plus courte chaîne peut être longue, car il convient d'examiner de nombreuses possibilités.
Le mathématicien Dijkstra a trouvé un algorithme commode pour trouver une plus court chaîne, ,sans oublier aucune possibilité, et cet algorithme peut être facilement programmé sur un ordinateur.

Présentation de cet algorithme sur un exemple : Considérons le graphe :



On va chercher une plus courte chaîne entre les sommets E et S.

Règles de construction :

Cet algorithme se construit de ligne en ligne en observant le graphe et en remplissant le tableau ci-contre au fur et à mesure.

- **Étape 1 :**
  Placer tous les sommets du graphe dans la première ligne d'un tableau.
  La deuxième ligne du tableau est obtenue en écrivant le coefficient 0 sous l'origine α et le coefficient ∞ sous tous les autres sommets.
  Sélectionner le sommet α. Son coefficient est 0 (plus petit des coefficients).
- **Étape 2 :**
  Soit X le sommet de plus petit coefficient ?
  Commencer une nouvelle ligne du tableau dite oigne courante.
  Rayer toutes les cases vides de la colonne X sous X.
- **Étape 3 :**
  Pour tous les sommets adjacents à X, répéter les instructions suivantes :

  - Soit Y le sommet courant ;
  - $p =$ coeff $(X) +$ poids de l'arête reliant X à Y.
  - Si $p <$ coeff(Y), alors écrire p (X) dans la case correspondante.
    Sinon, recopier le contenu de la ligne précédente.
    S'il reste des sommets adjacents à X, passer au sommet adjacent suivant et calculer son coefficient p (voir ci-dessus)) ; sinon, aller à l'étape 4.
- **Étape 4 :**
  Compléter la ligne courante en recopiant les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.
- **Étape 5 :**
  S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2 ; sinon, aller à l'étape 6.
- **Étape 6 :**
  La chaîne de poids minimum allant d α à ω est obtenue en écrivant de droite à gauche le parcours sélectionné en partant de ω.

E	A	B	C	D	S	choix du sommet	coefficient
0	∞	∞	∞	∞	∞	E	0
	$p = 0+3 = 3$ (E)	$p = 0+1 = 1$ (E)	∞	∞	∞	B	1
	$p = 1+1 = 2$ (B)		$p = 1+3 = 4$ (B)	$p = 1+5 = 6$ (B)	∞	A	2
			p=5>4 4 (B)	6 (B)	∞	C	4
				6 (B)	$p = 4+3 = 7$ (C)	D	6
					$p = 6+1 = 7$ (D)	S	7

On obtient comme chaîne : E-B-A-C-D-S, de poids 7