Exercices de révision

I Nouvelle Calédonie mars 2012

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\ ;\ 0)$ et $\mathrm{B}'(1\ ;\ 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Déterminer les réels a et b pour que $F : x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$.
3. (a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $\mathrm{ABB}'\mathrm{A}'$ est égale à

$$\frac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right).$$

   (b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

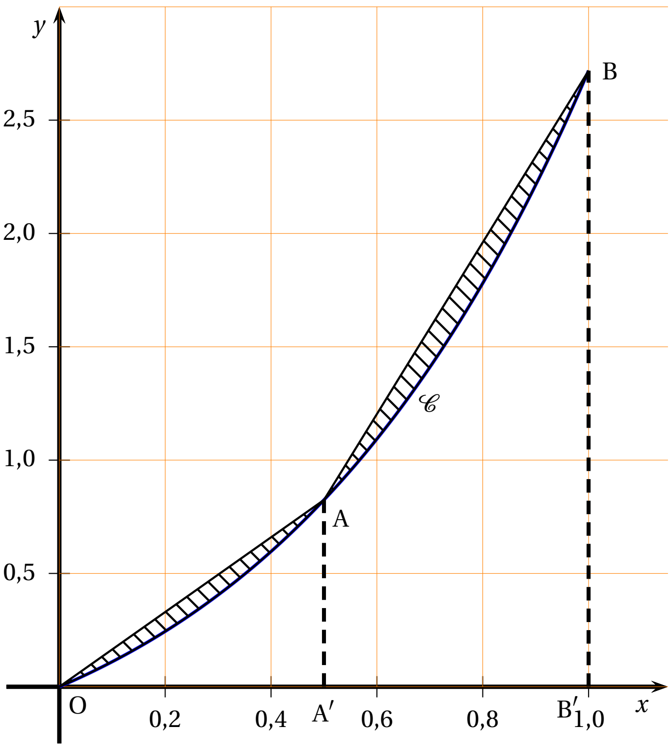
$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$.

   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

Annexe



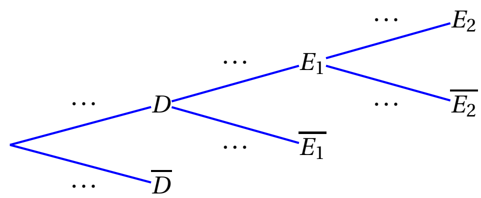
II Métropole juin 2012

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

   On considère les évènements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».

   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

III Pondichéry avril 2012

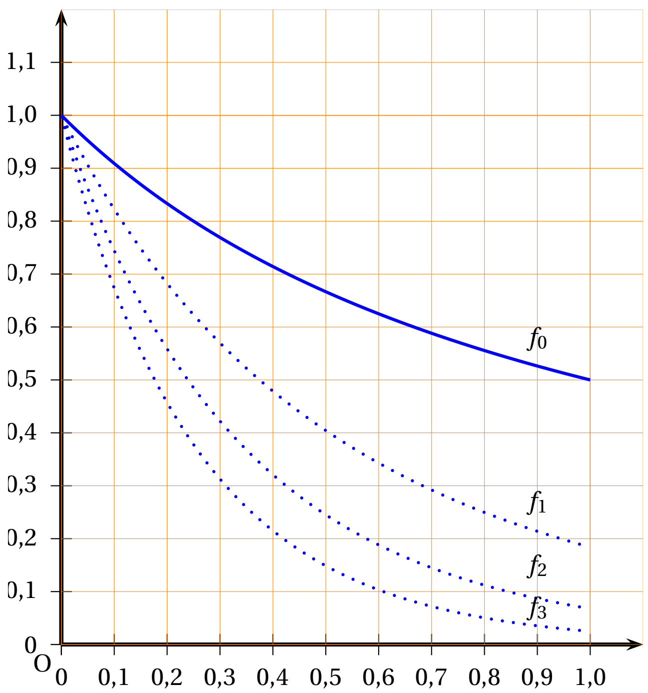
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

   pour différentes valeurs de n :



   (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

   (b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

   (b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Soient deux fonctions dérivables sur un un intervalle I. Montrer que $uv' = (uv)' - u'v$.

   (b) En posant $u(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right).$$

   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.

IV Liban mai 2012

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

   étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. (a) On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   En utilisant la formule $uv' = (uv)' - u'v$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

V Pondichéry avril 2013

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.

à€ tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend
   $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Déterminer la forme algébrique de z_M.
   (b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   (c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   (c) à‰crire les coordonnées des points I, B et M'.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   (e) Montrer que B$M' = 2$OI.