Exercices de révision

I Exercice, Besançon, session 1991

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

1. Calculer les nombres réels a, b, c et d sachant que :

$$f(-1) = 0,\ f(0) = 5,\ f(1) = 4 \text{ et } f'(1) = 0$$

   où f' désigne la dérivée de f

2. Construire la représentation graphique de f sur $[-1\,;\,1]$.
3. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$.
   (a) Calculer $P(-1)$; en déduire une factorisation de $P(x)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

II Exercice, La Réunion, 1986

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer des réels a et b vérifiant : pour tout x réel

$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 1}.$$

   Montrer que f est impaire.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$. (Pour étudier le signe de la dérivée, on posera $X = x^2$.)
3. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x]$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout x réel.
   (c) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm) : la droite D d'équation $y = x$ et la courbe C d'équation $y = f(x)$ en tenant compte des résultats précédents. On précisera la tangente à C en O.

III Amérique du sud, 1985 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

et soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$; l'unité de longueur est 1 cm.

1. Étudier les variations de f. On précisera une équation des asymptotes à (C).
2. (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (C) avec l'axe des abscisses.
   (b) Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
   (c) Donner une équation de la tangente (T) à (C) en I.
3. Tracer (C) et (T) dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
4. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$mx^2 + 2(m-1)x - (3m+2) = 0.$$

IV Maroc, 1983

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + a}$$

où a est un réel positif ($a > 0$).

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f est impaire.
3. Calculer la dérivée de f. Quelle valeur doit-on attribuer à a pour que la courbe représentative de f admette au point d'abscisse 1 une tangente horizontale ?
4. Dans ce qui suit, on suppose $a = 1$.
   Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

V Groupe IV, 1993

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

f est de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$, où a, b et c sont des réels.

1. Soit f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
2. Trouver les coefficients réels a, b, c en utilisant les données ci-dessus.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f admet comme asymptote, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la droite Δ d'équation : $y = x + 1$.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

VI Centres étrangers, 1994

Une fonction f est définie sur $\left]-1\,;\,\frac{1}{2}\right[$ par

$$f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$$

avec a, b, c réels.
On suppose que son tableau de variation est le suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$			0		$-$		
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0 $\searrow$ $\ln\frac{5}{8}$	$\searrow$	

1. En utilisant les données numériques du tableau, déterminer a, b et c.
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
3. Vérifier que le sens de variation de la fonction f obtenue est bien celui indiqué dans le tableau. Donner la valeur exacte du maximum de f

VII Antilles, 1991

Partie A

Soit la fonction numérique g définie pour tout réel strictement positif x par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0,27\,;\,0,28[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie pour tout réel strictement positif x par :

$$f(x) = \frac{4x\ln x}{x+1}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a :
   $$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}.$$
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f
   (c) Dresser le tableau de variation de f
3. Calculer les images par f des réels : 0,l ; 0,25 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2.
4. Tracer la portion de la courbe représentative de f correspondant aux réels x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2]$. On prendra un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ ayant comme unité graphique : 4 cm.

VIII Antilles-Guyane septembre 1998

On considère une fonction f de la variable réelle x, dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$
(unités graphiques 2 cm sur chaque axe).

Partie A
En interprétant le tableau donné ci-dessus :

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Placer dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$:
   (a) l'asymptote horizontale (D) ;
   (b) l'asymptote verticale (D$'$) ;
   (c) le point A où la tangente à $(\mathscr{C})$ est horizontale.

Partie B
On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

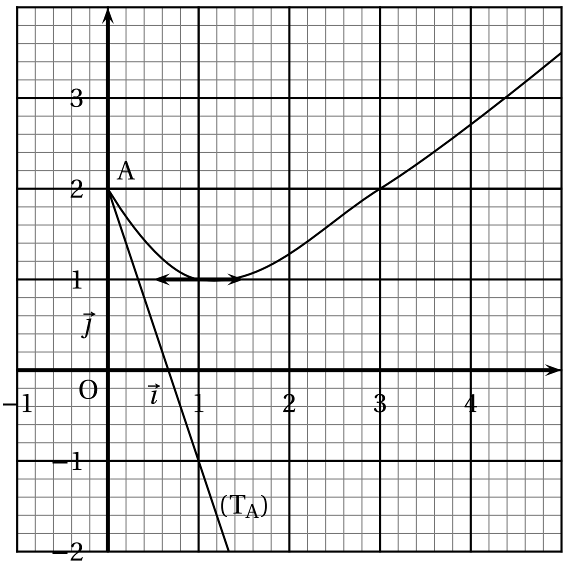
1. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
2. Au moyen de votre calculatrice remplir le tableau suivant (recopier ce tableau sur votre copie.)

x	-1	-0,75	0,5	2	3	4
$f(x)$						

3. Placer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la question **A. 2.**.

IX France juin 1999

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0.
La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

   (a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

   (b) Donner le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction c'est-à-dire $g = \dfrac{1}{f}$.
   On note g', la fonction dérivée de g.

   (a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.

   (b) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$?
   Justifier la réponse donnée.

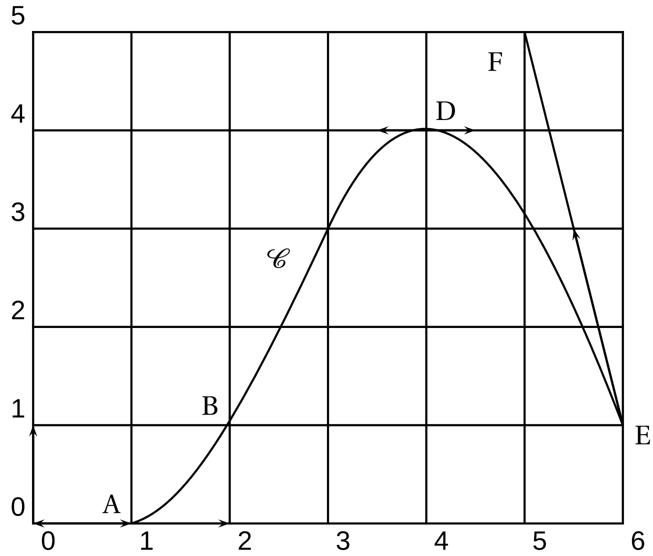
   (c) Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.

   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g. Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

X Polynésie juin 1999

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,6]$. Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points A(1 ; 0), B(2 ; 1), D(4 ; 4) et
E(6 ; 1). Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe au point E passe par le point F(5 ; 5).



Partie I
Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[\,1\,;\,6]$.

Partie II
On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle
$]\,1\,;\,6\,]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.

   (b) Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $]\,1\,;\,6\,]$ en donnant les justifications nécessaires.

   (d) Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.

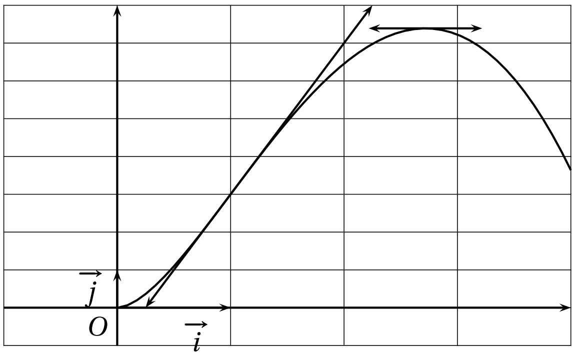
2. Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et la tangente au point d'abscisse 4.

XI Groupe 1 bis, 1996

PROBLéME

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

La courbe Ω est la représentation graphique sur l'intervalle $]0\,;\,4]$ d'une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2(a + b\ln x)$, où a et b désignent deux constantes réelles, et ln la fonction logarithme népérien.



Partie A

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
2. La courbe représentative de f passe par le point A $(1\,;3)$.
   Elle admet en A une tangente D de coefficient directeur 4.
   Montrer que $f(x) = x^2(3-2\ln x)$.
3. Déterminer une équation de la droite D.
4. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse P du point B de la courbe où la tangente à Ω est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$.
   Calculer la limite de f en $+\infty$.
   Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique sur l'intervalle $[4\,;\,5]$ et donner une valeur approchée à 0,01 près de cette solution.

Partie B

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3(11-6\ln x)$.
2. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0,1 près par excès, de l'aire exprimée en cm^2 de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Partie C

Une entreprise fabrique x milliers d'objets $(0 < \text{x} < 4)$.

Le coût de fabrication de tous ces objets, en milliers d'euros, est supposé égal à $f(x)$, où f désigne la fonction étudiée précédemment.

Le coût moyen de fabrication d'un objet est, en euros : $m(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Soit k le nombre d'objets pour lequel le coût moyen de fabrication est maximal.

1. Étudier les variations de la fonction m sur l'intervalle $]0\,;4[$.
2. En déduire la valeur exacte du nombre entier k.
3. Calculer le coût moyen maximal à 1 centime près.

XII Problème, Nouvelle Calédonie, 1996

Ce type de grand problème n'est plus dans l'esprit du programme.

La fonction f est une fonction numérique définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

On sait qu'il existe deux réels a et b tels que : pour tout $x > -1$, $f(x) = 2 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$;

de plus, le tableau de variation de f est donné ci-dessous (où f' désigne la fonction dérivée de f :

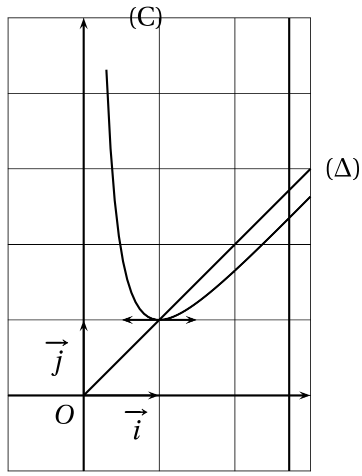
x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2

1. (a) Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) En utilisant les données du tableau de variation de f et la question (a), déterminer les réels a et b.
   On trouve donc : pour tout $x > -1$,
   $$f(x) = 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution α et que α appartient à l'intervalle $[-0,5\,;\,0]$.
   Donner une valeur approchée décimale de α à 10^{-1} près par défaut.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
   Soit (C) la courbe représentative de f dans ce repère.
   Déduire du tableau de variation de f que (C) possède deux asymptote (d_1) et (d_2) dont on donnera une équation.
   Construire (C), (d_1) et (d_2).
4. (a) Etudier le signe de $f(x)$ sur $]-1\,;\,+\infty[$ en utilisant le tableau de variation.
   (b) Déterminer une primitive de f sur $]-1+\infty[$.
   (c) Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan située entre la courbe (C), l'axe des abscisses du repère et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.
5. Soit g la fonction définie sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = \ln(f(x))$.
   En utilisant les fonctions composées, déduire les variations de g de celles de f.

XIII Exercice 1, Centres étrangers, 1996

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On rappelle que ln désigne la fonction logarithme népérien et que e est le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
On considère la fonction numérique f, définie sur l'intervalle $]0 ; \mathrm{e}]$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; \mathrm{e}[$.
2. La courbe (C) ci-dessous représente dans le plan (P) la fonction f.
   On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.
   (a) Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de $x - f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; \mathrm{e}]$.
   (b) En déduire la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ)
3. (nécessite d'avoir fait le chapitre sur l'intégration)
   (a) Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction numérique g sur l'intervalle $]0 ; \mathrm{e}]$ définie par $g(x) = (\ln x)^2$.
   En déduire, sur cet intervalle, une primitive de la fonction qui à x associe $\dfrac{\ln x}{x}$.
   (b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan (P) limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.



QCM

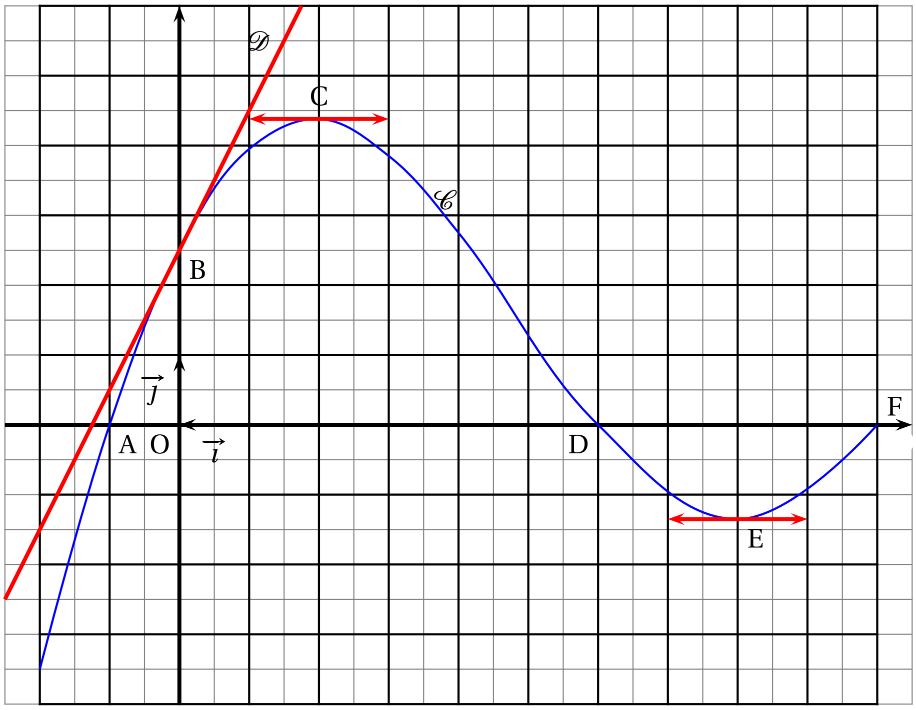
XIV Polynésie septembre 2006

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez la réponse exacte sans justifier votre choix.

Barème : À chaque question est attribué un certain nombre de points.
Une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points attribué.
Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$ et la fonction composée $g = \ln \circ f$. Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.
Les points A$(-1\ ;\ 0)$, B$(0\ ;\ 2{,}5)$, C$(2\ ;\ 4{,}38)$, D$(6\ ;\ 0)$, E$(8\ ;\ -1{,}35)$ et F$(10\ ;\ 0)$ sont des points de $\mathscr{C}$.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point B.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points C et E sont parallèles à l'axe des abscisses.

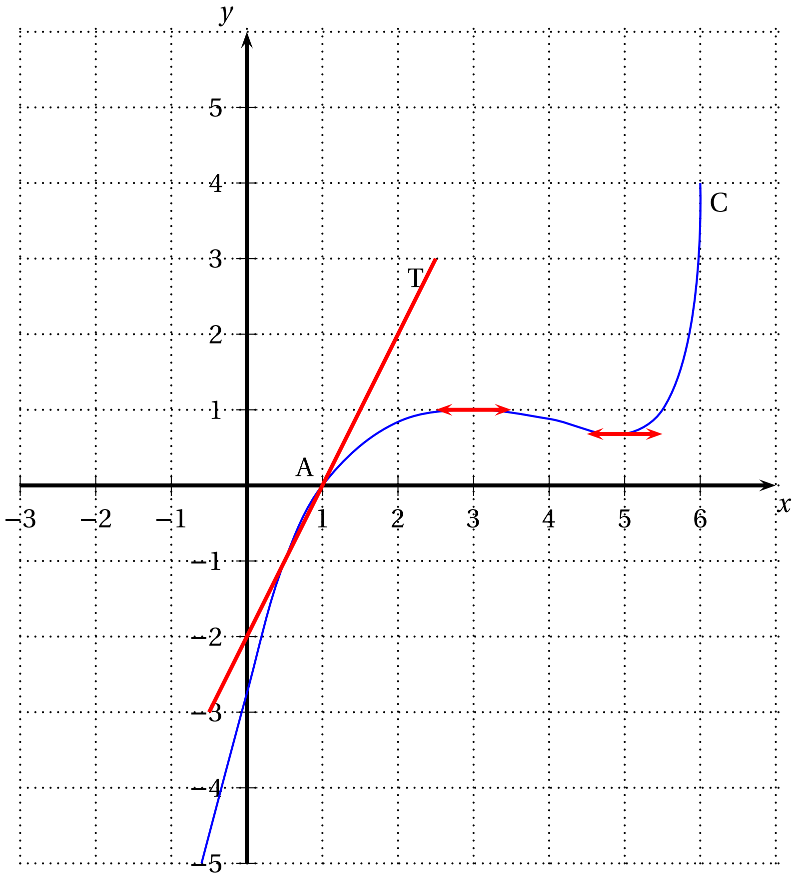


1. Quelle est la valeur de $f'(0)$ nombre dérivé de f en 0 ?
   a. $f'(0) = 2{,}5$; **b.** $f'(0) = 2$; **c.** $f'(0) = 0{,}5$.
2. Quel est l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 0$?
   a. $S = \emptyset$; **b.** $S = \{-1\ ;\ 6\ ;\ 10\}$; **c.** $S = \{2\ ;\ 8\}$.
3. À quel intervalle appartient le réel $I = \displaystyle\int_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$?
   a. $I \in [-1\ ;\ 5]$; **b.** $I \in [0\ ;\ 4{,}38]$; **c.** $I \in [15\ ;\ 30]$.
4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté D_g ?
   a. $\mathrm{D}_g =]-1\ ;\ 6[$; **b.** $\mathrm{D}_g =]0\ ;\ 10[$; **c.** $\mathrm{D}_g =]-2\ ;\ 10[$.
5. Quelle est la valeur de $g(0)$?
   a. $g(0) = 2{,}5$; **b.** $g(0) = 0$; **c.** $g(0) = \ln(2{,}5)$.
6. Quelle est la valeur du coefficient directeur m de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 ?
   a. $m = 2$; **b.** $m = \dfrac{1}{2}$; **c.** $m = 0{,}8$.
7. Quel est l'ensemble S' des solutions de l'équation $g'(x) = 0$?
   a. $S' = \emptyset$; **b.** $S' = \{-1\ ;\ 6\ ;\ 10\}$; **c.** $S' = \{2\}$.

8. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1 ?

a. $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$; **b.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$; **c.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$.

XV Liban mai 2006



On considère la représentation graphique C de la fonction f définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,6]$. La fonction dérivée de f est notée f'. La droite T est la tangente à C au point d'abscisse 1. On admet que la courbe C est située sous cette tangente T sur $]-\infty\,;\,6]$.

On répondra au QCM ci-après en s'appuyant sur les informations données par le graphique.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification. Une bonne réponse apporte 0,5 *point, une mauvaise enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.*

Partie A

Questions	
1. L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est	☐ $y = x - 1$
	☐ $y = x - 2$
	☐ $y = 2(x - 1)$
2. L'équation $f'(x) = 0$ admet	☐ 1 solution
	☐ 2 solutions
	☐ 0 solution
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est	☐ $-\infty$
	☐ -5
	☐ 6
4. La fonction $\ln f$ est définie sur	☐ $[-\infty\,;\,6]$
	☐ $]0\,;\,6]$
	☐ $]1\,;\,6]$
5. La fonction lnf s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	☐ 0 fois

Partie B

Dans cette partie du QCM, on appelle g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 6]$ par son expression $g(x) = \exp[f(x)]$.

Questions	
6. La fonction g est strictement croissante sur	☐ $]-\infty\ ;\ 3]$ ☐ $]1\ ;\ 6]$ ☐ $]-\infty\ ;\ 6]$
7. $g'(1)$ est égal à	☐ 2 ☐ 0 ☐ 2e
8. La fonction g s'annule exactement	☐ 1 fois ☐ 2 fois ☐ 0 fois

XVI La Réunion, septembre 2008

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a tracé ci-contre sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormal.

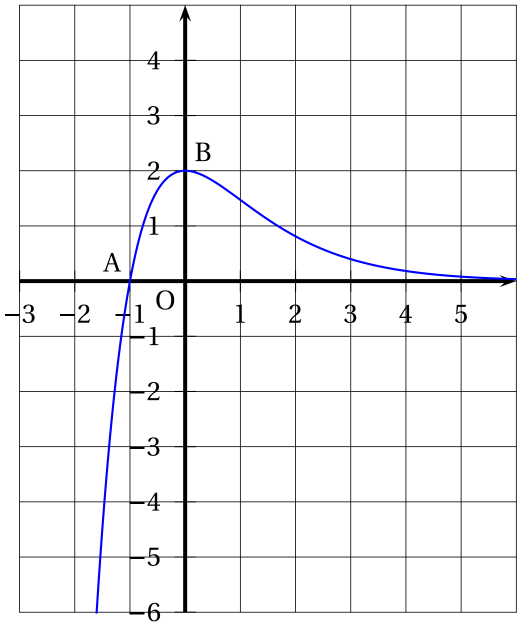
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Les points A$(-1\ ;\ 0)$ et B$(0\ ;\ 2)$ appartiennent à la courbe $(\mathscr{C})$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet en B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.

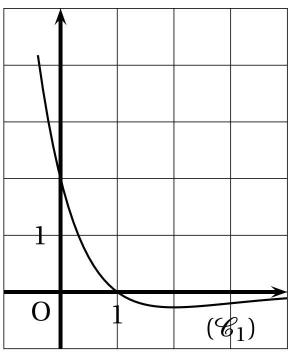
La fonction f est décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.



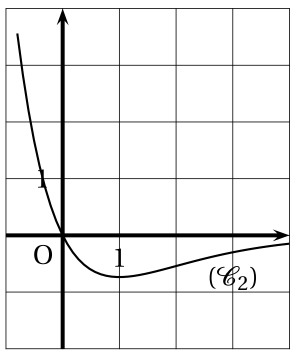
Pour chaque question, une et une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total est négatif la note est ramenée à* 0.

Question 1 :

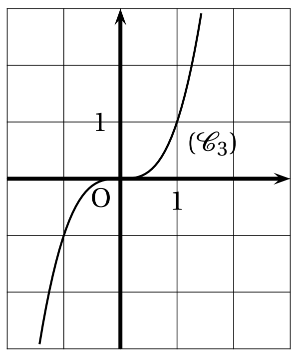
Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement la fonction f'. Déterminer laquelle.



Réponse A



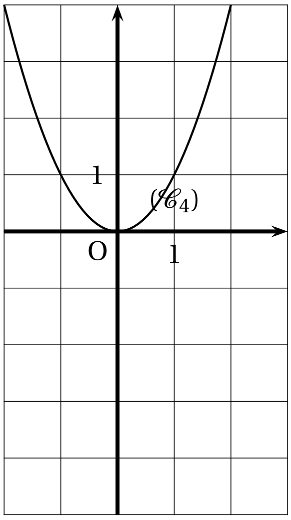
Réponse B



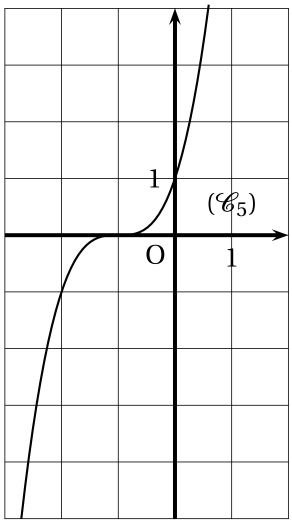
Réponse C

Question 2 :

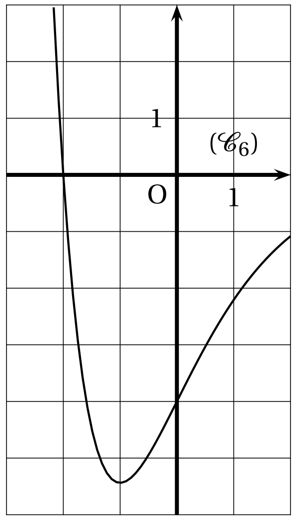
Une des trois courbes ci-dessous représente graphiquement une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Déterminer laquelle.



Réponse A



Réponse B



Réponse C

Question 3 :
On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Un des trois intervalles ci-dessous est l'ensemble de définition de la fonction g.
Déterminer lequel.

$]0\ ;\ +\infty[$
Réponse A

$]-1\ ;\ +\infty[$
Réponse B

$[-1\ ;\ +\infty[$
Réponse C

Question 4 :
g' est la fonction dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
Déterminer laquelle de ces affirmations est vraie.

$g'(1) \times g'(2) > 0$
Réponse A

$g'(1) \times g'(2) = 0$
Réponse B

$g'(1) \times g'(2) < 0$
Réponse C

Statistiques

XVII Nouvelle Calédonie, novembre 2007

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.
Le tableau cl-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

Le détail des calculs statistiques à effectuer à la calculatrice n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ le nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique.
On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnées. Sur l'axe des ordonnées, on commencera la graduation à 120.
2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$
   (a) On désigne par G_1, le point moyen des trois points M_1, M_2 et M_3 du nuage et par G_2 le point moyen des trois points M_4, M_5 et M_6 du nuage. Calculer les coordonnées respectives de G_1 et de G_2 dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
   (b) Déterminer l'équation réduite $y = Ax + B$ de la droite (G_1G_2) dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
   Les coefficients A et B seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.
   Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.
   (c) En utilisant la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement du nuage, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.
3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés,

(a) Soit Δ la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite Δ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

(b) En utilisant la droite Δ, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.

4. (a) Si le taux d'augmentation du nombre d'adhérents d'une année à l'autre était fixe et égal à t %, quelle serait la valeur de t arrondie au centième qui donnerait la même augmentation du nombre d'adhérents entre 2000 et 2005 ?

   (b) Avec ce même taux d'augmentation t, quel serait le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, pour l'année 2007 ?

XVIII Liban mai 2006

Le taux de pénétration du téléphone mobile dans la population française indique le pourcentage de personnes équipées d'un téléphone mobile par rapport à la population totale.
Le tableau ci-dessous donne, entre 1998 et 2004, l'évolution de la population française et du taux de pénétration.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

(*Source : site de l'INSEE*)

1. (a) Calculer le nombre, en millions, de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 et en 2004.

   (b) Entre ces deux années quel est le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration ?

2. Placer dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\,;\,y_i\right)$: les unités graphiques sont de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées.

3. L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme : $y = a\ln(x) + b$ où a et b sont des réels. On pose pour cela $z = \ln(x)$.

   (a) Recopier et compléter le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0						
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

   (b) En déterminant avec la calculatrice une équation de la droite de régression de y en z, obtenue par la méthode des moindres carrés, donner la valeur approchée décimale à 10^{-2} près par défaut des coefficients a et b.

4. En admettant que cet ajustement reste fiable à moyen terme :

   (a) Déterminer le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager.

   (b) À partir de quelle année peut-on penser que le taux de pénétration dépassera 85 % ?

XIX Nouvelle Calédonie, novembre 2006

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125	127

1. (a) Construire le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\,;\,;y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
   Les unités graphiques seront : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   (b) Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième). Placer le point G dans le repère.

2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.

(a) Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

(b) Tracer cette droite (D) dans le repère.

(c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cette approximation ?

3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec $f(x) = -2x^2 + 23x + 63$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

   (b) Tracer la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la fonction f dans le repère de la question 1.

   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?

4. En réalité, le bénéfice en 2005 est en hausse de $0,9\,\%$ par rapport à celui de 2004. Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ?