Bac : Antilles-Guyane juin 2015

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en (voir ci-dessous) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. (a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.

   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

   (b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

   (a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

   On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\ ;\ +\infty\right[$.

   (b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

   (a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

   (b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ?