Correction de la feuille d'exercices sur les intervalles de confiance

I

1. La fréquence des personnes votant pour Lotfi est $f=\dfrac{52}{100}=\boxed{0,52}$.
   - $n=100$ donc $n\geqslant 30$
   - $nf=52\geqslant 5$
   - $n(1-f)48\geqslant 5$

   On peut utiliser un intervalle de confiance au seuil de confiance 95 %.
   L'intervalle de confiance est
   $I=\left[0,52-\dfrac{1}{100}\ ;\ 0,52+\dfrac{1}{100}\right]=\boxed{[0,42\ ;\ 0,62]}$.
2. On en déduit que la proportion réelle p de gens votant pour Lofti appartient à cet intervalle.
   Il est possible que $p<0,5$ donc il n'est pas sûr d'être élu.
3. Il faut que $f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0,5$ (borne inférieure de l'intervalle de confiance).
   $0,52-\dfrac{1}{\sqrt{n}}>0,5\Leftrightarrow 0,02>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   $\Leftrightarrow\ 0,02^2>\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\dfrac{1}{n}$ en appliquant la fonction carré, croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis, en appliquant la fonction inverse, décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$:
   $\dfrac{1}{0,02^2}<n$ donc $\boxed{n>2500}$

II

1. $f_A=0,68$ pour le groupe A ; $f_B=0,56$ pour le groupe B.
   Les conditions pour avoir des intervalles de confiance sont vérifiées.
   Les deux intervalles de confiance sont, pour chacun des deux groupes : $I_A=[0,58\ ;\ 0,78]$.
   $I_B=[0,46\ ;\ 0,66]$.
   Les deux intervalles se chevauchent donc on ne peut pas conclure quant à l'efficacité du médicament !
2. Pour pouvoir conclure quant à l'efficacité du médicament (en gardant les mêmes fréquences, il faut augmenter la taille de la population étudiée, puisque l'amplitude des intervalles diminue si n augmente).
   En effet, celle-ci vaut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   On doit avoir $0,46+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<0,68-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{n}}<0,12$.
   On en déduit $n>277,7$ donc $\boxed{n=278}$

III

Une urne contient des boules blanches et des boules noires.. On aimerait connaître la proportion p de boules blanches.
Pour cela, on effectue 100 tirages avec remise dans cette urne. On obtient 32 boules blanches. La taille de l'échantillon est $n=100\geqslant 30$.
La fréquence observée de boules blanches est $f=0,32$ donc $nf=32\geqslant 5$.
$n(1-f)=100\times 0,68=68\geqslant 5$.
on peut utiliser un intervalle de confiance au seuil 0,95 :

$$I=\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\boxed{[0,22\ ;\ 0,42]}.$$

Avec un seuil de confiance de 95 %, on peut estimer que la proportion réelle p de boules blanches dans l'urne appartient à cet intervalle, donc est comprise entre 0,22 et 0,42.

IV

On calcule l'intervalle de confiance pour Nicolas Sarkozy :
$$I=\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,55f-\dfrac{1}{\sqrt{992}}\ ;\ 0,55+\dfrac{1}{\sqrt{992}}\right]$$
soit

$$\boxed{I\approx[0,518\ ;\ 0,582.}$$

La proportion des votants en faveur de N. Sarkozy se trouvant dans [0,518; 0,582], avec un seuil de confiance de 95 % , on peut en déduire qu'il avait de grandes chances d'être élu. (Son score réel a été de 53,08 %)

Remarque : Les sondages sont souvent réalisés auprès d'environ 1 000 personnes car cela permet de connaître la proportion d'un candidat à $\pm 3,16\,\%$ près, puisque
$\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0,0316=3,16\,\%$.

V

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
$\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0,08$ donc $\sqrt{n}=\dfrac{2}{0,08}=\dfrac{200}{8}=25$ d'où $n=25^2$
$=\boxed{625}$.
La taille de l'échantillon était 625.