

Correction des exercices sur les intervalles de confiance (feuille n° 2)

I

Une urne contient des boules blanches et des boules noires.. On aimerait connaître la proportion p de boules blanches.

Pour cela, on effectue 100 tirages avec remise dans cette urne. On obtient 32 boules blanches. La taille de l'échantillon est $n = 100 \geq 30$.

La fréquence observée de boules blanches est $f = 0,32$ donc $nf = 32 \geq 5$.

$n(1 - f) = 100 \times 0,68 = 68 \geq 5$.

on peut utiliser un intervalle de confiance au seuil 0,95 :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,22 ; 0,42].$$

Avec un seuil de confiance de 95 %, on peut estimer que la proportion réelle p de boules blanches dans l'urne appartient à cet intervalle, donc est comprise entre 0,22 et 0,42.

II

On calcule l'intervalle de confiance pour Nicolas Sarkozy :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,55f - \frac{1}{\sqrt{992}} ; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{992}} \right]$$

soit $I \approx [0,518 ; 0,582]$.

La proportion des votants en faveur de N. Sarkozy se trouvant dans $[0,518 ; 0,582]$ avec 95 % de chance, on peut en déduire qu'il avait de grandes chances d'être élu.

Remarque : Les sondages sont souvent réalisés auprès d'environ 1 000 personnes car cela permet de connaître la proportion d'un candidat à 3 % près.

III

L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,08 \text{ donc } \sqrt{n} = \frac{2}{0,08} = \frac{200}{8} = 25 \text{ d'où } n = 25^2 = \boxed{625}.$$

La taille de l'échantillon était 625.

IV

1. La taille de l'échantillon, 1 000, est supérieure à 30. $f = 0,257$, donc $nf = 257 \geq 5$ et $n(1 - f) = 743 \geq 5$. Les conditions de validité de l'intervalle de confiance sont réunies.

$$2. 0,257 - \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,225$$

$$0,257 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,289.$$

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est

$$\boxed{[0,225 ; 0,289]}.$$

On peut estimer que le pourcentage de français qui n'ont pas ou peu confiance en les hôpitaux est compris entre 22,5 % et 28,9 % au seuil de 95 %.

V

1. La taille de l'échantillon (230) est supérieure à 25 d'une part et les fréquences observées (0,34 et 0,28) sont comprises entre 0,2 et 0,8 d'autre part donc on peut déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 %.

2. Pour Simplet :

$$0,34 - \frac{1}{\sqrt{230}} \approx 0,274$$

$$0,34 + \frac{1}{\sqrt{230}} \approx 0,406$$

$$\text{Par conséquent } = \boxed{I_1 \approx [0,274 ; 0,406]}$$

Pour Grognon :

$$0,28 - \frac{1}{\sqrt{230}} \approx 0,214$$

$$0,28 + \frac{1}{\sqrt{230}} \approx 0,346$$

$$\text{donc } \boxed{I_2 = [0,214 ; 0,346]}.$$

3. Les deux intervalles ne sont pas disjoints donc on ne peut pas affirmer que Simplet est plus drôle que Grognon avec un risque d'erreur de 5 %.