Correction de la feuille d'exercices sur le modèle exponentiel

I

Une population a une évolution exponentielle. Cette population est de 12 550 individus en 2010 et de 18 072 individus en 2012.
On note u(n) la population de cette ville à l'année 2010 + n.

1. La suite u est géométrique de raison q.
   On a $u(2) = u(0)q^2$ donc $18072 = 12550q^2$.
   On en déduit $q^2 = \dfrac{18072}{12550} = 1,44$ donc $q = \sqrt{1,44} = 1,2$: $\boxed{q = 1,2}$
2. Le taux de variation t vérifie $q = 1 + t$ donc $t = q - 1 = \boxed{0,2 = 20\,\%}$.
3. 2020 correspond à $n = 10$.
   On peut estimer la population en 2020 à $u(10) = u(0) \times q^{10} \approx \boxed{77\,706}$.

II Perruches à collier

La perruche à collier est une espèce originaire d'Afrique centrale et occidentale, d'Asie, d'Inde et du Pakistan. Elle a été importée en Europe comme oiseau domestique mais certains individus de cette espèce se sont échappés des conteneurs de transport et ont commencé à nicher près des zones aéroportuaires. Ainsi, on commence à en signaler en Île-de-France à partir de 1990. Différents comptages ont permis d'obtenir les résultats suivants :

année	2006	2008	2012	2014
population	500	1 050	2 700	5 000

Ici, il faut prendre garde au fait que les intervalles de temps ne sont pas constants (2 ans puis 4 ans puis 2 ans). On ne peut donc pas calculer les taux de variation.
Si on prend comme unité de temps 2 années, l'évolution est exponentielle si la population est multipliée par le même nombre q tous les deux ans.
$q = \dfrac{1050}{500} \approx 2,1$, $q^2 = \dfrac{2700}{10560}$ donc $q \approx 1,6$ et $q = \dfrac{5000}{2700} \approx 1,8$. Avec aussi peu de valeurs, il est difficile de dire si ces valeurs sont relativement constantes ou pas.
Si on en prend la moyenne arithmétique de ces trois valeurs, on trouve $\dfrac{2,1+1,6+1,8}{3} = 1,8$.
Si on considère la suite géométrique u de premier terme $u(0) = 500$ et de raison $q = 1,8$, on a, pour tout entier n,

$$u(n) = 500 \times 1,8^n.$$

Pour $n = 0$ (année 2006), on trouve évidemment $u(0) = 500$, pour $n = 2$ (année 2008), on trouve $u(1) = 900$, pour $n = 3$ (année 2012), on trouve $u(3) \approx 2900$ et, pour $n = 4$ (année 2014), on trouve $u(4) \approx 5250$.

III Élimination d'un antibiotique

L'amoxicilline est un antibiotique utilisé pour traiter les infections bactériennes cheez un homme adulte.
40 % de cet antibiotique est éliminé par l'organisme chaque heure.

1. Notons $u(0) = 500$ la quantité injectée à l'instant initial ($t = 0$) et $u(n)$ la quantité restant au bout de n heures.
   Chaque heure, 40 % de cet antibiotique est éliminé donc il reste à chaque heure 60 % de la quantité présente à l'heure précédente.
   Pour tout n, $u(n+1) = 60\,\% u(n) = 0,6u(n)$.
   La suite u est donc géométrique de raison $q = 0,6$.
   Alors, pour tout n, $u(n) = u(0) \times 0,6^n$ donc $\boxed{u(n) = 500 \times 0,6^n}$
2. Si on élimine 450 g d'amoxicilline, il en reste 50 mg.
   On cherche n tel que $500 \times 0,6^n \leqslant 50$ donc $0,6^n \leqslant 0,1$; on trouve que c'est à partir de 5 heures.

IV Population mondiale

Population mondiale de 1950 à 1990 puis de 2000 à 2015

Année	Population mondiale	Taux de variation (%)	Variation absolue
1950	2 525 149 000		
1955	2 758 315 000	9,23	233 166 000
1960	3 018 344 000	9,43	260 029 000
1965	3 322 495 000	10,08	304 151 000
1970	3 682 488 000	10,84	359 993 000
1975	4 061 399 000	10,29	378 911 000
1980	4 439 632 000	9,31	378 233 000
1985	4 852 541 000	9,3	412 909 000
1990	5 309 668 000	9,42	45 712 700
	Taux moyen en %	9,74	
2000	6 126 622 000		
2005	6 519 636 000	6,41	393 014 000
2010	6 929 725 000	6,29	410 089 000
2015	7 349 472 000	6,06	419 747 000
	Taux moyen en %	6,25	

1. Un modèle exponentiel est-il envisageable entre 1050 et 1990 car les taux de variation sont assez stables.
2. La suite u correspondant aux valeurs de la population est géométrique de rayon $q = 1 + t$, en prenant pour t la valeur moyenne des taux, donc $t = 9,74\,\%$.
   Alors $q = 1 + 9,74\,\% = 1,974$.
   On en déduit $u(n) = u(0)q^n$ donc $\boxed{u(n) = 2\,525\,149\,000 \times 1,0974^n}$.
3. De même, entre 2000 et 2015, les taux sont stables.
   On a de même une suite géométrique.
   $v(n) = v(0)q'^n$ avec $v(0) = 6\,126\,622\,000$ et $q' = 1 + t' = 1,0625$
4. 2050 correspond à $n = 10$ (car les années vont de 5 en 5).
   'La population en 2050 serait donc $\boxed{u(10) \approx 11\,233\,380\,594}$.