Modèle de Malthus

I Extrait d'un texte de Malthus

En 1798, l'économiste anglais Robert Thomas Malthus publie son Essai sur le principe de population dans lequel il compare l'évolution de la population humaine et celles des ressources naturelles.
Ainsi, au chapitre 1, écrit-il :

« Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles.
Cependant, pour ne pas être taxé d'exagérations, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages.
Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique. Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la terre.
Cependant, nous sommes sûrs que leur accroissement se fait à un rythme tout à fait différent de celui qui gouverne l'accroissement de la population. [...]
Examinons dans quelle mesure la production de notre île pourrait être accrue, dans des circonstances idéales. Supposons que grâce à une excellente administration, sachant donner de puissants encouragements aux cultivateurs, la production des terres double dans les vingt-cinq premières années (il est d'ailleurs probable que cette supposition excède la vraisemblance!)
Dans les vingt-cinq années suivantes, il est impossible d'espérer que la production puisse continuer à s'accroître au même rythme, et qu'au bout de cette seconde période la production de départ aura quadruplé : ce serait heurter toutes les notions acquises sur la fécondité du sol.
L'amélioration des terres stériles ne peut résulter que du travail et du temps ; à mesure que la culture s'étend, les accroissements annuels diminuent régulièrement.
Comparons maintenant l'accroissement de la population à celui de la nourriture. Supposons d'abord (ce qui est inexact) que le coefficient d'accroissement annuel ne diminue pas, mais reste constant. Que se passe-t-il ?
Chaque période de vingt-cinq ans ajoute à la production annuelle de la Grande-Bretagne une quantité égale à sa production actuelle. Appliquons cette supposition à toute la terre : ainsi, à la fin de chaque période de vingt-cinq ans, une quantité de nourriture égale à celle que fournit actuellement à l'homme la surface du globe viendra s'ajouter à celle qu'elle fournissait au commencement de la même période.
Nous sommes donc en état d'affirmer, en partant de l'état actuel de la terre habitable, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables à la production, ne peuvent jamais augmenter à un rythme plus rapide que celui qui résulte d'une progression arithmétique.
Comparons ces deux lois d'accroissement : le résultat est frappant. Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son soi suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population - arrivée à quatre-vingt-huit millions - ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. À la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement. Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim !
Considérons maintenant la surface de la terre, en posant comme condition qu'il ne sera plus possible d'avoir recours à l'émigration pour éviter la famine. Comptons pour mille millions le nombre des habitants actuels de la Terre. La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ; au bout de trois siècles, 4 096 à 13 ; après deux mille ans, la différence sera immense et incalculable. »

II Questions sur ce texte

1. Quel taux de mortalité t_m prend Malthus ?
2. Quel serait alors le taux de natalité t_n ?
3. Montrer alors que le taux de variation de la population est $t = \dfrac{1}{18}$.
4. Il fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle ; la raison de la suite géométrique associée est donc $q = 1 + t$.
   Que vaut q ?
5. On cherche au bout de combien de temps la population va doubler. En admettant que calculs de pusissances avec des exposants entiers puissent s'étendre avec des exposants réels, on cherche un nombre x tel que $\left(\dfrac{19}{18}\right)^x \approx 2$.
   Trouver à la calculatrice une valeur approximative de x.
6. Malthus avait trouvé, à l'aide de la table d'Euler, $x = 12 + \dfrac{4}{5} \approx 12,8$. Comparer avec le résultat que tu as trouvé.
7. Pour ne pas être accuser d'exagérer, il décide de prendre une estimation basse en partant du fait que la population double tous les 25 ans. Il prend alors cette période comme unité de temps et estime que, si la population humaine a une évolution exponentielle, la production de nourriture a une évolution linéaire, celle-ci augmentant d'une unité tous les 25 ans.
   En prenant l'exemple de la Grande-Bretagne du début du XIXe siècle, il s'intéresse alors à deux suites : la suite de valeurs $u(n)$ de la population et la suite de valeurs $v(n)$ des Fixons $v(0) = 11$ dans une unité fictive.
   Donner alors l'expression de $u(n)$ et de $v(n)$.
   Compléter alors le tableau ci-dessous :

année	1800	1825	1850	1875	1900
n	0	1	2	3	4
$u(n)$	11	22			
$v(n)$	11	22			
$u(n) - v(n)$	0	0	11		

   La dernière ligne du tableau représente les nombres de personnes ne pouvant être nourries. Ainsi, Malthus conclut qu'en un siècle, 121 millions des personnes seront condamnées à la famine.
   Compléter le graphique ci-dessous pour visualiser ces deux évolutions.
8. Quelles critiques peut-on faire sur le modèle de Malthus ?