Devoir Commun Mathématiques

Mercredi 14 mai 2025

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ

Première

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

Ce sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3

L'utilisation d'une calculatrice possédant un mode examen est autorisée.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Cet exercice est un QCM (**Q**uestionnaire à **C**hoix **M**ultiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$.
La fonction dérivée f' de f est donnée sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = \dfrac{-x}{e^{x^2}}$	**b.** $f'(x) = -\dfrac{1}{(e^x)^2}$	**c.** $f'(x) = \dfrac{1}{e^x}$	**d.** $f'(x) = -\dfrac{x}{e^x}$

Question 2

Pour tous réels a et b, le nombre $\dfrac{e^a}{e^{-b}}$ est égal à :

a. e^{a-b}	**b.** $e^{\frac{a}{-b}}$	**c.** $\dfrac{e^b}{e^{-a}}$	**d.** $e^a - e^{-b}$

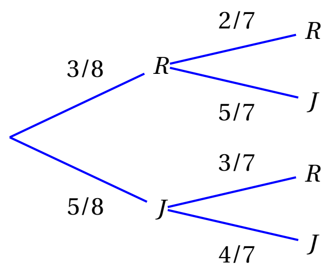
Question 3

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = \dfrac{9}{2}$ et $u_6 = 3$.
Alors le premier terme u_0 et la raison r de la suite sont :

a. $u_0 = 6$ et $r = -\dfrac{1}{2}$	**b.** $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $r = 6$
c. $u_0 = 6$ et $r = \dfrac{1}{2}$	**d.** $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $r = \dfrac{1}{2}$

Question 4

On tire deux boules successivement sans remise dans une boule contenant trois boules rouges et cinq boules jaunes. Cette expérience est décrite par l'arbre ci-dessous.



La probabilité de tirer une boule jaune au deuxième tirage est :

a. $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{8}$	**b.** $\dfrac{20}{32}$	**c.** $\dfrac{5}{8}$	**d.** $\dfrac{40}{56}$

Question 5

La valeur **exacte** de la somme $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$ est :

a. 1,750 030 518	**b.** $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$	**c.** $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$	**d.** 1,999 969 482

EXERCICE 2 **8 POINTS**

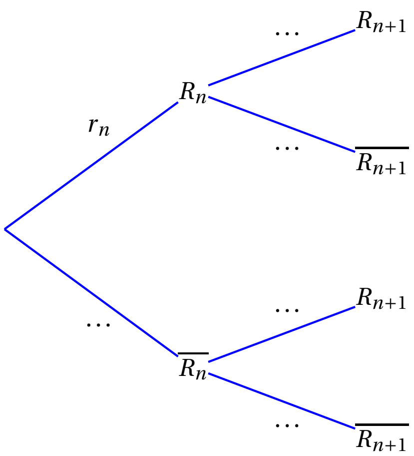
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

On considère :

- un salarié malade est toujours absent.
- la première semaine de travail, le salarié n'est pas absent.
- si la semaine n, le salarié n'est pas malade, alors la probabilité qu'il soit malade la semaine $n+1$ est $0,25$.
- si la semaine n, le salarié est malade, alors la probabilité qu'il soit malade la semaine $n+1$ est $0,3$.

On choisit au hasard un salarié dans l'entreprise. Pour tout entier naturel n non nul, on note l'événement R_n : «le salarié est malade à la n-ième semaine ».

1. Expliquer pourquoi $r_1 = 0$ et donner la valeur de r_2.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le salarié soit malade à la n-ième semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous. (Aucune justification n'est attendue).



3. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $r_{n+1} = 0,05r_n + 0,25$
4. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = r_n - \dfrac{5}{19}$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.
5. Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire l'expression de r_n en fonction de n.
6. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (r_n) lorsque $n \to +\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 **7 POINTS**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

On note $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en $x = 0$.

3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

4. En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de la fonction f.

5. On admet que f est positive sur l'intervalle $]-\infty; -1]$. Expliquer pourquoi, pour tout réel x, $f(x) \geq -e^2$.