Devoir surveillé commun n° 4 - TS - 14/04/18 - durée : 4 heures

Exercice 1 : sur 5 points. Commun à tous les élèves

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

   b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)\left(2-\ln(x)\right)}{x^2}.$$

   b. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

   c. Calculer $f(1)$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right)$.

   On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 2 : sur 5 points. Commun à tous les élèves.

Soient les deux nombres complexes $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$. On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique de Z.
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Ecrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire que $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
5. On admet que :
   - $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   - pour tous réels a et b, $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$.

   Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}.$$

Exercice 3 : sur 5 points. Commun à tous les élèves.

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :

- S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
- M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
- I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

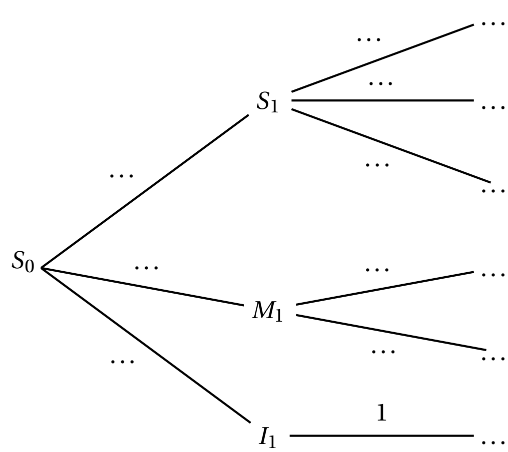
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \; ; \; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

PARTIE A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2. A l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,850 0	0,050 0	0,100 0
4	2	0,722 5	0,075 0	0,202 5
5	3	0,614 1	0,084 9	0,301 0
6	4	0,522 0	0,085 9	0,392 1
7	5	0,443 7	0,081 9	0,474 4
8	6	0,377 1	0,075 4	0,547 4
...	...	...	...	...
20	18	0,053 6	0,013 3	0,933 0
21	19	0,045 6	0,011 3	0,943 1
22	20	0,038 8	0,009 6	0,951 6

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Exercice 4 : sur 5 points. Pour les élèves ne suivant pas la spécialité mathématique.

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

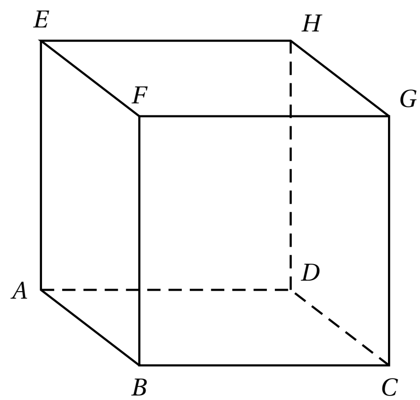
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   b. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   c. Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   a. Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   b. En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   c. Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

Exercice 4 : sur 5 points. Pour les élèves suivant la spécialité mathématiques

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. $36 = \dfrac{72}{2} = \dfrac{8\times 9}{2} = 1+2+3+4+5+6+7+8$ donc 36 est un $\boxed{nombre triangulaire}$.

De plus, $\boxed{36 = 6^2}$.

2. **a.** $1+2+\ldots+n = p^2 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} = p^2 \iff n(n+1) = 2p^2 \iff n^2+n-2p^2 = 0.$

Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $\boxed{n^2+n-2p^2=0}$.

b. $n^2+n-2p^2 = 0 \iff 4n^2+4n-8p^2=0 \iff 4n^2+4n+1-8p^2=1 \iff (2n+1)^2-8p^2=1$

Donc le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $\boxed{(2n+1)^2-8p^2=1}$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2-8y^2=1$, où $x\in\mathbf{N}$ et $y\in\mathbf{N}$.

1. Deux couples solution sont, par exemple, $\boxed{(3\,;1)}$ et $\boxed{(1\,;0)}$.

2. Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ solution de (E).
Soit d un diviseur commun à x et y.
Alors d divise x^2, y^2, $8y^2$ et donc d divise x^2-8y^2 donc d divise 1.
On en déduit que $d=1$ ou $d=-1$ ce qui veut dire que x et y sont **premiers entre eux**.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 8\\1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+8y\\x+3y\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x' &=& 3x+8y\\ y' &=& x+3y\end{array}\right.$

2. La matrice A a un déterminant égal à 1, donc non nul, donc elle admet une matrice inverse A^{-1}.

Pour déterminer A^{-1} on peut chercher la matrice carrée $A' = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ et résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues $A\times A' = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; enfin il faut vérifier que $A'\times A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.

On peut également déterminer A^{-1} à la calculatrice et on trouve : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -8\\-1 & 3\end{pmatrix}}$.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff A^{-1}\times\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3 & -8\\-1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3x'-8y'\\-x'+3y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl}x &=& 3x'-8y'\\ y &=& -x'+3y'\end{array}\right.$$

3. $(x\,;\,y)$ est solution de (E)
$$\begin{aligned}
&\iff x^2-8y^2=1\\
&\iff \left(3x'-8y'\right)^2-8\left(-x'+3y'\right)^2=1\\
&\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8\left(x'^2-6x'y'+9y'^2\right)=1\\
&\iff 9x'^2-48x'y'+64y'^2-8x'^2+48x'y'-72y'^2=1\\
&\iff x'^2-8y'^2=1\\
&\iff (x'\,;\,y') \text{ est solution de (E)}
\end{aligned}$$

4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3,\ \ y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

On effectue une **démonstration par récurrence**.

- *Initialisation* Pour $n = 0$: $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$ donc $x_0^2 - 8y_0^2 = 9 - 8 = 1$ donc $(x_0\,;\,y_0)$ est solution de (E).
  La propriété est vraie au rang 0.
- *Hérédité* On suppose que la propriété est vraie à un rang p quelconque ($p \geqslant 0$) c'est-à-dire que $(x_p\,;\,y_p)$ est solution de (E) ; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut démontrer que $(x_{p+1}\,;\,y_{p+1})$ est solution de (E).
  On a vu dans la question précédente que si $(x; y)$ était solution de (E), alors $(x'\,;\,y')$ défini par $\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ est aussi solution de (E).
  Comme $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E), on peut dire que $(x_{n+1}\,;\,y_{n+1})$ est solution de (E) puisque $\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}$. Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire.

  D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

On cherche un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

- On cherche n entier naturel tel que : $1 + 2 + 3 + \ldots + n \geqslant 2015$.
  Ce qui équivaut à $\dfrac{n(n+1)}{2} \geqslant 2015 \iff n^2 + n - 4030 \geqslant 0$.
  L'équation $x^2 + x - 4030 = 0$ a pour solutions $\dfrac{-1-2\sqrt{329}}{2} \approx -63,98$ et $\dfrac{-1+2\sqrt{329}}{2} \approx 62,98$.
  Pour que le nombre triangulaire soit supérieur à 2 015, il faut que $\boxed{n \geqslant 63}$.
- Dans la partie **A** on a vu qu'un nombre triangulaire $1 + 2 + \ldots + n$ était un carré si et seulement s'il existait un entier p tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.
- Dans la partie **C** on a déterminé une suite de couples $(x_n\,;\,y_n)$ qui étaient tous solutions de l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.
- On va donc chercher $n \geqslant 63$ tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$; si $n \geqslant 63$, alors $2n+1 \geqslant 127$.
  Ce qui revient à chercher les couples $(x_n\,;\,y_n)$ solutions de (E) avec $x_n \geqslant 127$.
- En partant de $\begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix}$ et en multipliant successivement par la matrice A, on trouve comme solutions $\begin{pmatrix} 17\\ 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 99\\ 35\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 577\\ 204\end{pmatrix} \ldots$
- $577 = 2 \times 288 + 1$ donc un nombre triangulaire supérieur à 2 015 est $1 + 2 + 3 + \ldots + 288 = \dfrac{288 \times 289}{2} = \boxed{41\,616}$.
- On peut vérifier que $41\,616 = 204^2$ (résultat en conformité avec la question **A. 2. a.**).