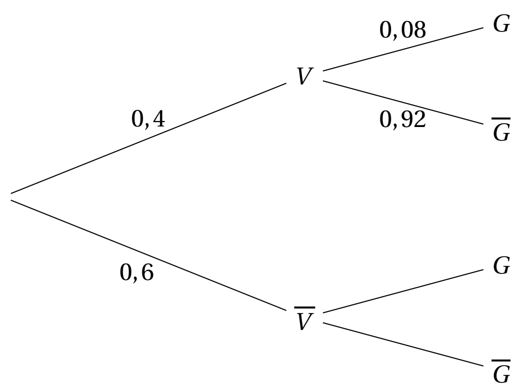
Corrigé sujet bac Métropole Réunion juin 2018

II

Partie A

1. (a) $P(G) = 0,2$ car 20% de la population a contracté la grippe.

   (b) On obtient :



2. On calcule $P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$ soit 3,2% de chances que la personne ait contractée la grippe et soit vaccinée.

3. On calcule $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$

   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G)$.

   Donc $P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G) - P(V \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168$ puis $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$.
   La probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

1. Il s'agit de n expériences aléatoires identiques et indépendantes à 2 issues (la personne est vaccinée ou non) avec une probabilité de succès de 0,4.

   La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,4)$.

2. Avec la loi $\mathscr{B}(40\,;\,0,4)$

   (a) $P(X = 15) \approx 0,123$

   (b) $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 0,130$

3. On calcule $P(1450 < X < 1550)$
   $= P\left(\dfrac{1450 - 1500}{30} < Z < \dfrac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(\dfrac{-5}{3} < Z < \dfrac{5}{3}\right)$
   $\approx 0,904$

III

Partie A

1. (a) $(EA) \perp (ABC)$ donc (EA) est la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE.

   $(CB) \perp (ABE)$ donc (CB) est la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE.

   (b) Les droites (EA) et (BC) sont non coplanaires donc non sécantes.

   Avec deux hauteurs non sécantes, il est impossible d'avoir 4 hauteurs concourantes!

2. (a) $x - y + z = 0$ est bien l'équation cartésienne d'un plan donc je vérifie que les points A, C et H appartiennent bien à ce plan :
   $A(0\,;\,0\,;\,0)$ donc $x_A - y_A + z_A = 0$
   $C(1\,;\,1\,;\,0)$ donc $x_C - y_C + z_C = 1 - 1 - 0 = 0$
   $H(0\,;\,1\,;\,1)$ donc $x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$

   (b) $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $D(0\,;\,1\,;\,0)$ donc $\overrightarrow{DF}(1\,;\,-1\,;\,1)$ qui est bien un vecteur normal au plan d'après les coefficients de l'équation cartésienne donc $(FD) \perp (ACH)$ puis (FD) est bien la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

   (c) Par analogie, on en déduit que (AG) est la hauteur issue de A, (CE) est la hauteur issue de H et (HB) est la hauteur issue de H.
   D'après l'énoncé, les 4 hauteurs correspondent aux « grandes diagonales » du cube et sont donc concourantes.

Partie B

1. (a) (MK) est orthogonale au plan (NPQ) donc d'après le théorème de la porte, (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier, $(MK) \perp (PQ)$.

   (b) On a montré que (PQ) est orthogonale à (NK) et (MK) qui sont deux droites sécantes du plan (MNK) donc par définition, (PQ) est orthogonale au plan (MNK).

2. (PQ) est orthogonale au plan (MNK) donc d'après le théorème de la porte, (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan; en particulier, $(PQ) \perp (MN)$.

Partie C

$\overrightarrow{RS}(4\,;\,-1\,;\,-4)$ $\overrightarrow{ST}(3\,;\,-5\,;\,7)$ $\overrightarrow{TU}(0\,;\,8\,;\,-2)$ $\overrightarrow{RU}(7\,;\,2\,;\,1)$
$\overrightarrow{RT}(7\,;\,-6\,;\,3)$ $\overrightarrow{SU}(3\,;\,3\,;\,5)$

$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RU} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 21 - 10 + 7 \neq 0$ donc (ST) n'est pas orthogonale à (TU).

Avec deux arêtes opposées non orthogonales, ce tétraèdre n'est pas orthocentrique.

IV

1. (a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$

   (b) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8$ donc $\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$

   $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_2 = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$

   $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{6}}$ donc $\boxed{z_3 = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

   $\arg(z_3) = \dfrac{-\pi}{2}$ donc z_3 est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative et

   $\boxed{\mathrm{Im}(z_3) = -3\sqrt{3}}$

   (c) FIGURE REPRÉSENTATION DES POINTS A_0, A_1, A_2, A_3

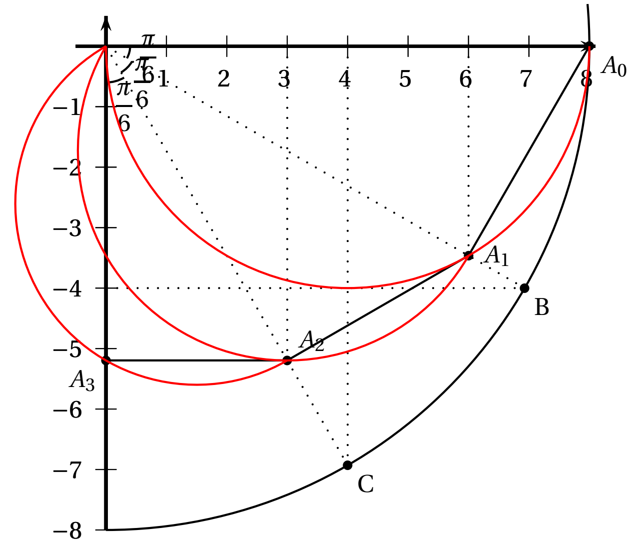
   La relation $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_n$ montre en prenant les arguments que

   $\arg(z_{n+1}) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)+\arg(z_n)$. Or $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

   On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\overrightarrow{OA_n},\ \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

   On a donc $\left(\overrightarrow{OA_0},\ \overrightarrow{OA_1}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, puis $\left(\overrightarrow{OA_0},\ \overrightarrow{OA_2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{OA_0},\ \overrightarrow{OA_3}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

   - A_0 a pour affixe 8 ;
   - On sait que $\sin -\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$. On trace donc l'horizontale partant du point de coordonnées (0 ; −4) qui coupe le cercle de centre O de rayon 8 en un point B d'abscisse positive. La droite verticale d'équation $x = 6$ coupe OB en A_1.
   - On sait que $\cos -\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. On trace donc la verticale ale partant du point de coordonnées (4 ; 0) qui coupe le cercle de centre O de rayon 8 en un point C d'ordonnée négative. La droite verticale d'équation $x = 3$ coupe OC en A_2.
   - Enfin A_3 est le projeté orthogonal de A_2 sur l'axe des ordonnées puisque $OA_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}OA_2$ ou encore $OA_3 = \cos\dfrac{\pi}{6}OA_2$.



Remarque :
Puisque que pour tout naturel n, $OA_{n+1} = \cos\dfrac{\pi}{6}OA_n$, le point A_{n+} est la projeté orthogonal de A_n sur la droite OA_{n+1}.
A_1 est donc le point d'intersection de la droite (OB) avec le demi-cercle de diamètre $[OA_0]$ contenant les points d'ordonnée négative.
A_2 est le point d'intersection de la droite (OC) avec le demi-cercle de diamètre $[OA_1]$. (voir les demi-cercles tracés en rouge)
A_3 est le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec le demi-cercle de diamètre $[OA_2]$.

2. (a) *Initialisation* $z_0 = 8 \times 1 \times 1 = 8$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : On suppose que pour $n \geqslant 0$, $z_n = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ et on va montrer que

   $z_{n+1} = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$

   On a $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} z_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ *(par hypothèse de récurrence).*

   Donc $z_{n+1} = 8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$ *(en utilisant la propriété $a^n \times a = a^{n+1}$ pour tout nombre réel a)* .
   Donc la propriété est héréditaire.

   La propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$
   Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) On a donc $u_n = |z_n| = 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

   Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ puis $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 8 \times 0 = 0}$

3. (a) $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}z_k - z_k}{\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}z_k} = \dfrac{\cancel{z_k}\left(\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}-1\right)}{\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}\cancel{z_k}} = \dfrac{\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{3-\text{i}\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{4}{3-\text{i}\sqrt{3}} = \dfrac{-1-\text{i}\sqrt{3}}{3-\text{i}\sqrt{3}}$

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{(-1-\text{i}\sqrt{3})(3+\text{i}\sqrt{3})}{(3-\text{i}\sqrt{3})(3+\text{i}\sqrt{3})} = \dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}-3\text{i}\sqrt{3}+3}{9+3} = \dfrac{-4\text{i}\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{12\times\sqrt{3}} = \dfrac{-12\text{i}}{12\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{i}$

On a donc $\left|\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{i}\right| \iff \dfrac{|z_{k+1}-z_k|}{|z_{k+1}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff \dfrac{A_kA_{k+1}}{OA_{k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$.

(b) D'après la question précédente, pour tout entier naturel k,

$A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|z_{k+1}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$

Donc $\ell_n = \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cdots + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \dfrac{8}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^1+\cdots+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right)$

Puis $\ell_n = 4\times\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 4\times\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}\times\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

Pour finir, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}(1-0) = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}} \approx 29,86$