

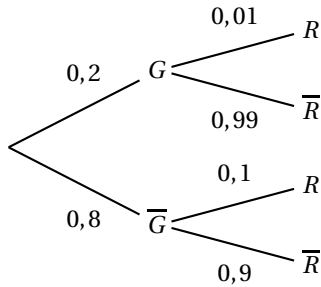
Exercice I

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. (a)



- (b) L'évènement est $G \cap R$, donc sa probabilité est :
 $p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,2 \times 0,01 = 0,002$.
- (c) On a de même : $p(\overline{G} \cap R) = p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(R) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.
 D'après la loi des probabilités totales :
 $p(R) = p(G \cap R) + p(\overline{G} \cap R) = 0,002 + 0,08 = 0,082$.
- (d) Il faut trouver $p_R(G) = \frac{p(G \cap R)}{p(R)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,0024$
 soit 0,002 au millièmè près.

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture.

On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de X .

Il y a trois évènements à considérer :

- G qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est 0,2 et qui nécessite 0 € de dépense;
- $\overline{G} \cap \overline{R}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est $0,8 \times 0,9 = 0,72$ et qui nécessite 100 € de dépense;
- $\overline{G} \cap R$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est 0,08 et qui nécessite $100 + 400 = 500$ € de dépense.

La loi de probabilité de X est :

évènement	G	$\overline{G} \cap \overline{R}$	$\overline{G} \cap R$
coût x_i	0 €	100 €	500 €
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	0,2	0,72	0,08

$E(X) = \sum x_i \times p_i = 0 + 100 \times 0,72 + 500 \times 0,08 = 72 + 40 = 112$
 Chaque voiture coûte en moyenne 112 €; il y a 2500 voitures, ce qui fait une dépense totale de $112 \times 2500 = 280000$ €.

Conclusion : le budget de 250 000 € sera insuffisant.

Partie B

1. Avec $p = 0,80$ et $n = 600$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est

$$I_{600} = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,8 - 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}} ; 0,8 + 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}} \right] \approx [0,768 ; 0,832].$$

2. Pour les 600 derniers contrats la fréquence de contrats de courte durée est égale à

$$f = \frac{550}{600} \approx 0,917.$$

Or $0,917 \notin I_{600}$, donc, au risque de 5 %, l'affirmation de la directrice n'est pas correcte.

Partie C

1. On doit trouver $p(500 \leq Y \leq 600)$; la calculatrice donne $\approx 0,2417$, soit 0,242 au millièmè près.

2. La calculatrice donne pour $p(Y \leq a) = 0,15$, $a \approx 346$ km.

Exercice II

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$, donc par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. On a $g(x) = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = xe^x \times e^{-4} + 2e^{x-4} - 2$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4} xe^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4} = 0$, donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$.

3. $g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2) \times 1 \times e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = e^{x-4}(x+3)$.

On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-2		$+\infty$

$\approx -2,001$

On a $g(-3) = (-3+2)e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2 \approx -2,001$.

4. D'après le tableau de variations : sur l'intervalle $]-3; +\infty[$, $f(-3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g étant continue sur cet intervalle car dérivable sur ce même intervalle ; il existe donc un réel unique α , $\alpha \in]-3; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5. Conclusion :

- $g(\alpha) = 0$;
- sur $]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$;
- sur $]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$

6. La calculatrice donne $g(3,069) \approx -0,002006$ et $g(3,070) \approx 0,00038$, donc $\alpha \approx 3,070$ à 10^{-3} près.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}.$$

1. $f(x) = 0 \iff x^2 - x^2 e^{x-4} = 0 \iff x^2(1 - e^{x-4}) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x^2 = 0 \\ 1 - e^{x-4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 1 = e^{x-4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = x - 4 \end{cases} \iff$
 $\begin{cases} x = 0 \\ 4 = x \end{cases}$

L'équation a deux solutions : 0 et 4.

2. De la question 5 de la partie A on déduit que :

- $f'(\alpha) = 0$;
- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$;
- $f'(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

La fonction est donc croissante sur $[0; \alpha[$ et décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\alpha; +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{x-4} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(0) = 0;$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4};$$

$$f(x) = x^2(1 - e^{x-4}).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{x-4} = -\infty$; d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion : la fonction est décroissante $]-\infty; 0[$ de plus l'infini à zéro croissante sur $[0; \alpha[$ de zéro à $f(\alpha)$ puis décroissante sur $]\alpha; +\infty[$ de $f(\alpha)$ à moins l'infini.

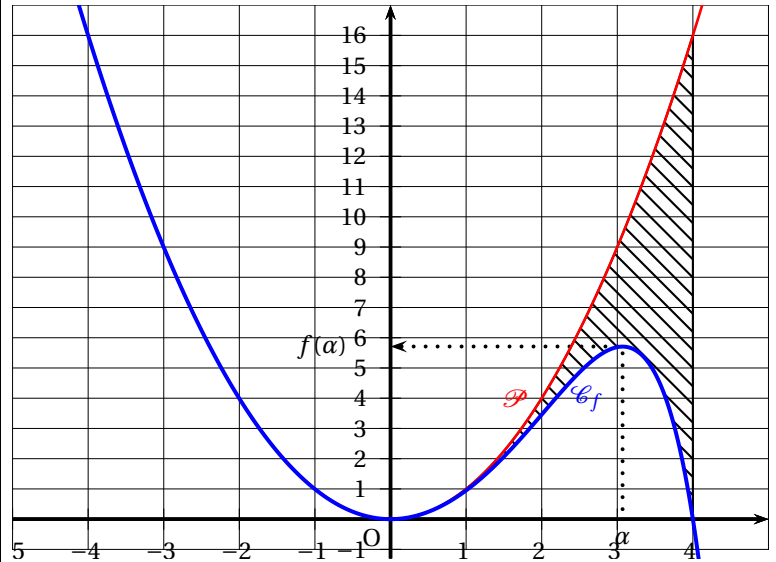
3. D'après la question précédente sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.

On a vu à la question A. 3. que α est le réel tel que $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)e^{\alpha-4} - 2 = 0 \iff (\alpha+2)e^{\alpha-4} = 2 \iff e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha+2}$.

$$\text{Donc } f(\alpha) = \alpha^2(1 - e^{\alpha-4}) = \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha+2}\right) = \alpha^2 \left(\frac{\alpha+2-2}{\alpha+2}\right) = \alpha^2 \times \frac{\alpha}{\alpha+2}.$$

$$\text{Finalement } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha+2} \approx 5,71$$

Partie C : Aire d'un domaine



1. Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$d(x) = x^2 - f(x) = x^2 - (x^2 - x^2 e^{x-4}) = x^2 e^{x-4}.$$

Cette fonction produit de deux fonctions positives est positive et ne s'annule que pour $x = 0$.

Géométriquement ceci montre que la parabole \mathcal{P} est au dessus de la courbe \mathcal{C}_f , le seul point commun étant l'origine.

2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} est définie par : $F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)e^{x-4}$.

On a vu à la question précédente que sur l'intervalle $[0; 4]$ la courbe \mathcal{P} est au dessus de la courbe \mathcal{C}_f , donc l'aire de la surface limitée par la courbe \mathcal{P} , la courbe \mathcal{C}_f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$, est en unité d'aire égale à l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^4 [x^2 - f(x)] dx = \left[\frac{x^3}{3} - F(x) \right]_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - \left(\frac{4^3}{3} - (4^2 - 2 \times 4 + 2) e^{4-4} \right) \right] - \left[0 - (0 - 2e^{0-4}) \right] = 10 - 2e^{-4} \text{ (u. a.)}$$

Exercice III

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z : $z(z^2 - 8z + 32) = 0$.

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

On résout dans \mathbb{C} l'équation $z(z^2 - 8z + 32) = 0$.

- $z = 0$ ou
- $z^2 - 8z + 32 = 0$; $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 32 = -64 = -8^2$

Cette équation a donc deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i \text{ et } z_2 = 4 - 4i.$$

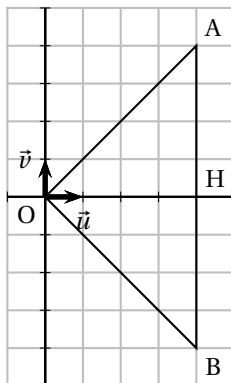
Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire $\mathcal{A} = \frac{OH \times AB}{2}$

où H est le milieu de [AB].

Le point H a pour affixe $\frac{z_1 + z_2}{2} = 4$ donc $OH = 4$.

$AB = |(4 + 4i) - (4 - 4i)| = |8i| = 8$; donc $\mathcal{A} = \frac{4 \times 8}{2} = 16$.



Affirmation 1 vraie

2. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points dont les affixes z vérifient $|z - 3| = |z + 3|$.

Affirmation 2 : L'ensemble \mathcal{E} est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives z , 3 et -3 .

$|z - 3| = MA$ et $|z + 3| = MB$; donc $|z - 3| = |z + 3| \iff MA = MB$.

L'ensemble \mathcal{E} est donc une droite, la médiatrice de [AB].

Affirmation 2 fausse

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout n par : $z_n = (1 - i\sqrt{3})^n$.

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n , les points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

On sait que $(\overrightarrow{OM_{n+3}}, \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{z_{M_{n+3}} - z_O}{z_{M_n} - z_O}\right)$

donc $(\overrightarrow{OM_{n+3}}, \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{(1 + i\sqrt{3})^{n+3}}{(1 + i\sqrt{3})^n}\right) = \arg\left((1 + i\sqrt{3})^3\right) = \arg(-8) = \pi \quad [2\pi]$.

On en déduit que les trois points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

Affirmation 3 vraie

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x : $\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0$.

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π .

$\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$; or $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\frac{3\pi}{4}$ est une solution de l'équation mais ce n'est pas une des quatre solutions proposées.

Affirmation 4 fausse

Exercice IV

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$.

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

- La formule à entrer dans la cellule B3 et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) est $= B2 / (B2 + 8)$
- La suite (u_n) semble décroissante.
- La suite (u_n) semble converger vers 0.
- On écrit un algorithme calculant u_{30} :

Variables	i entier et u réel
Initialisation	u prend la valeur 1
Traitement	Pour i variant de 1 à 30 u prend la valeur $\frac{u}{u+8}$
	Fin pour
Sortie	Afficher u

Partie B : Étude générale

1. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à-dire que $u_n > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$$

Or $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ donc $\frac{u_n}{u_n + 8} > 0$; on a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.

- On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geq 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout n .

$$2. \text{ Pour tout } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n + 8} - u_n = u_n \left(\frac{1}{u_n + 8} - 1 \right) = u_n \left(\frac{1 - u_n - 8}{u_n + 8} \right) = \frac{u_n(-u_n - 7)}{u_n + 8}$$

Pour tout n , on a $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ et $-u_n - 7 < 0$.

On en déduit que $\frac{u_n(-u_n - 7)}{u_n + 8} < 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n ,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

On en déduit que $v_n - 1 = \frac{7}{u_n}$ donc que $u_n = \frac{7}{v_n - 1}$.

$$1. \bullet v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n + 8}} = 1 + \frac{7(u_n + 8)}{u_n} = 1 + \frac{7u_n}{u_n} + \frac{56}{u_n} = 1 + 7 + \frac{56}{u_n} = 8 + 8(v_n - 1) = 8 + 8v_n - 8 = 8v_n$$

$$\bullet v_0 = 1 + \frac{7}{u_0} = 1 + \frac{7}{1} = 8$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 8$.

2. On déduit de la question précédente que, pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.

$$\text{Or } u_n = \frac{7}{v_n - 1}, \text{ donc, pour tout } n, \text{ on a } u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. $8 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{8^{n+1} - 1} = 0$ ce qui veut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , $u_n < 10^{-18}$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; donc, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut dire qu'à partir d'un certain rang n_0 , tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $] -10^{-18}; 10^{-18}[$. Comme $u_n > 0$ pour tout n , on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n > n_0$, on ait $u_n < 10^{-18}$.

On résout l'inéquation $u_n < 10^{-18}$.

$$u_n < 10^{-18} \iff \frac{7}{8^{n+1} - 1} < 10^{-18} \iff 7 < 10^{-18} (8^{n+1} - 1) \iff 7 \times 10^{18} + 1 < 8^{n+1}$$

$$\iff \ln(7 \times 10^{18} + 1) < \ln(8^{n+1}) \iff \ln(7 \times 10^{18} + 1) < (n+1) \ln(8)$$

$$\iff \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} < n + 1 \iff n > \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1$$

Or $n > \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1 \approx 19,87$ donc c'est à partir de $n_0 = 20$ que $u_n < 10^{-18}$.