Corrigé du baccalauréat S Centres Étrangers 8 juin 2016

Exercice 1 — Commun à tous/toutes les candidats/e/s — 4 points

Affirmation 1

Soit M la variable aléatoire égale à la masse d'une baguette. Par hypothèse, M suit la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 10.
Il s'agit de vérifier si $\mathrm{P}(M > 187) > 0,9$. La calculette donne

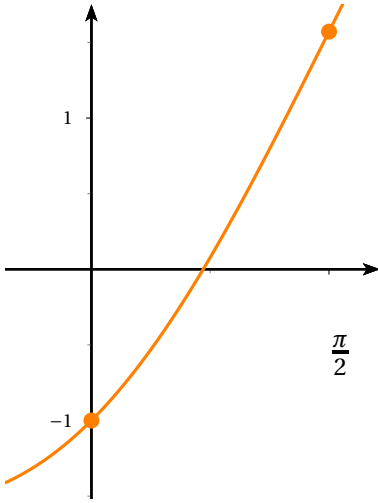
$$P(X \leqslant 187) \simeq 0,0968$$

On en déduit :

$$P(X > 187) = 1 - P(X \leqslant 187) \simeq 0,903$$

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2



La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto -\cos x$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
La fonction f est alors strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\cos x$, strictement croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Elle est également continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On a par ailleurs $\left\{\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \text{et} \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Puisque $0 \in [-1, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Déterminons l'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ en résolvant le système $\left\{\begin{array}{lcl} 1+2t & = & -5t'+3 \\ 2-3t & = & 2t' \\ 4t & = & t'+4 \end{array}\right.$ (S)

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2t+5t' & = & 2 \\ 3t+2t' & = & 2 \\ 4t-t' & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' = 4t-4 & & \\ 2t+5(4t-4) & = & 2 \\ 3t+2(4t-4) & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' = 4t-4 & & \\ 22t & = & 22 \\ 11t & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t' & = & 4t-4 \\ t & = & 1 \\ t & = & \frac{10}{11} \end{array}\right.$$

Puisque le système n'a pas de solution, alors les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes :

L'affirmation 3 est fausse.

Affirmation 4

La droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$\mathscr{D}_1$ est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}.\vec{n} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 1 = 0$. Puisque $\vec{v}.\vec{n} = 0$, alors $\mathscr{D}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}$:

L'affirmation 4 est vraie.

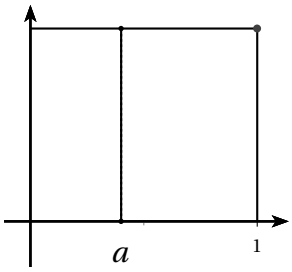
Exercice 2 — Commun à tous/toutes les candidat/e/s — 6 points

Partie A

1. a.

Dans la cas où f est une fonction strictement positive, on a :

$$A_1 = a \times f(0) \quad \text{u.a} \quad \text{et } A_2 = (1-a) \times f(0) \quad \text{u.a}$$



Par suite :

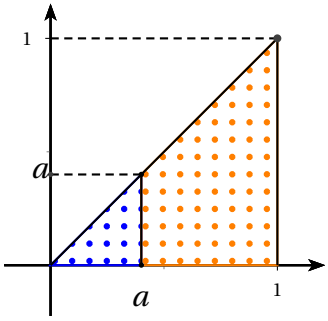
$$A_1 = A_2 \iff a \times f(0) = (1-a) \times f(0) \overset{f(0)\neq 0}{\iff} 1 - a = a \iff a = \frac{1}{2}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.

b.

A_1 est l'aire d'un triangle rectangle, A_2 celle d'un trapèze :

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a}$$



Par suite :

$$A_1 = A_2 \iff \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \iff a^2 = \frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.

2. a.

$$A_1 = \int_0^a f(x)\,dx \qquad A_2 = \int_a^1 f(x)\,dx$$

b. Soit $a \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\iff \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^1 f(x)\,dx \\ &\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \\ &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \end{aligned}$$

Puisqu'on a raisonné par équivalence, on a montré que

Le nombre réel a vérifie la condition (E) si et seulement si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$

3. a. D'après ce qui précède, les valeurs de a pour lesquelles la condition (E) est vérifiée sont les solutions de l'équation

$$F(x) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \text{ où F est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction exponentielle.}$$

Puisqu'une primitive de la fonction exponentielle est elle-même, alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2}$$

soit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

ou encore :

$$x = \ln \frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

La condition (E) est vérifiée pour l'unique nombre réel $\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

b. Il suffit de prouver :

$$F\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$$

où F est une primitive sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Une primitive de f est F, définie sur $[0,1]$ par $F(x) = -\dfrac{1}{x+2}$.

Calculons chacun des deux nombres $\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ et $F\left(\frac{2}{5}\right)$:

$$\frac{F(0)+F(1)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{\frac{2}{5}+2} = -\frac{1}{\frac{12}{5}} = -\frac{5}{12}$$

Par conséquent :

La valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient

Partie B

1. Puisqu'une primitive de f est la fonction F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = 4x - x^3$, on déduit de A.2.a que la condition (E) est vérifiée si et seulement si

$$4a - a^3 = \frac{4-1}{2}$$

soit :

$$a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$$

2. a.

$$u_1 = g(0) = \frac{3}{8}$$

b. La fonction g, en tant que fonction polynôme, est dérivable sur $[0,1]$ et on a, pour tout nombre réel x de $[0,1]$:

$$g'(x) = \frac{3}{4}x^2$$

Puisque $g' \geqslant 0$ sur $[0,1]$, la fonction g est croissante sur $[0,1]$.

c. Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

• $\mathscr{P}_0$ s'écrit :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$$

Puisque $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ u_1 = \dfrac{3}{8} \end{cases}$, on a $0 \leqslant 0 \leqslant \dfrac{3}{8} \leqslant 1$:

$\mathscr{P}_0$ est vraie

• Supposons la propriété $\mathscr{P}_p$ vraie pour un entier naturel p. On a donc :

$$0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$$

.

Montrons alors que $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie, i.e :

$$0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$$

.

On a, par hypothèse :

$$0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$$

La fonction g étant croissante sur [0,1], on en déduit :

$$g(0) \leqslant g(u_p) \leqslant g(u_{p+1}) \leqslant g(1)$$

soit :

$$\frac{3}{8} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant \frac{5}{8}$$

On en déduit bien sûr :

$$0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$$

. On a prouvé :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}_p \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathscr{P}_{p+1} \text{ est vraie}$$

• On a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

d. La suite u est croissante et majorée par 1 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers une limite ℓ comprise entre 0 et 1.

Puisque la fonction g est continue sur [0,1], alors

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = g(\ell)$$

On a par ailleurs :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$$

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$, on en déduit :

$$\ell = g(\ell)$$

soit

$$\ell = a$$

puisque l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution d'après la question 1.

e. Une valeur approchée de u_{10} à 10^{-8} prés est 0,389 807 84

Exercice 3 Commun à tous/toutes les candidat/e/s 5 points

Partie A

1. a. L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ en convenant d'appeler succès le fait que la personne accepte de répondre à la question. On est alors en présence d'une succession de 700 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (puisque la probabilité qu'une personne accepte de répondre reste constante). La variable aléatoire X dénombrant les personnes ayant accepté de répondre suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b. D'après la calculette : $P(X \leqslant 399) \simeq 0{,}0573$.
Par suite :

$$P(X \geqslant 400) = P(X > 399) = 1 - P(X \leqslant 399) \simeq 0{,}9427$$

La meilleure valeur approchée est $0,94$

2. Lorsque n personnes sont interrogées, notons X_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes acceptant de répondre . X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.6$.
On cherche le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 400) > 0.9$.
Puisque

$$P(X_n \geqslant 400) > 0.9 \iff 1 - P(X_n \leqslant 399) > 0.9 \iff P(X_n \leqslant 399) < 0.1$$

la question est de déterminer, parmi les entiers n vérifiant $P(X_n \leqslant 399) < 0.1$, le plus petit.
La calculette donne $\left\{\begin{array}{l} P(X_{693} \leqslant 399) \simeq 0{,}1034 \\ \text{et} \\ P(X_{694} \leqslant 399) \simeq 0{,}0955 \end{array}\right.$
Puisque la suite $(P(X_n \leqslant 399))$ est décroissante, alors

694 est le plus petit entier n convenant

Partie B

1. Puisque $n \geqslant 50$, alors $n \times f = 0,29 \times n \geqslant 0,29 \times 50$, soit $n \times f \geqslant 14,5$
De manière analogue, $n \times (1-f) = 0,71 \times n \geqslant 0,71 \times 50$, soit $n \times (1-f) \geqslant 35,5$
Puisque $\left\{\begin{array}{l} n \geqslant 30 \\ n \times f \geqslant 5 \\ n(1-f) \geqslant 5 \end{array}\right.$, les conditions d'application d'un intervalle de confiance sont vérifiées.
Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la proportion de personnes favorables au projet est

$$\left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est inférieure ou égale à $0,04$ si et seulement si

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04$$

Puisque

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \frac{2}{0,04} \leqslant \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n \geqslant \left(\frac{2}{0,04}\right)^2 \iff n \geqslant 2500$$

, alors

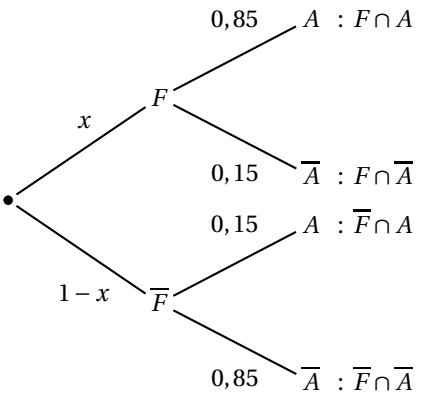
Le nombre minimum de personnes à interroger est 2500

Partie C

1.

$$P_F(A) = 0,85 \qquad P_{\overline{F}}(A) = 0,15$$

2. a.



b. D'après l'arbre :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(F \cap A) + \mathrm{P}(\overline{F} \cap A) = 0,85x + 0,15(1-x) = 0,7x + 0,15$$

Par suite :

$$0,7x + 0,15 = 0,29$$

3. La résolution de l'équation ci-dessus conduit à $x = 0,2$

Parmi les personnes ayant répondu 20 % sont réellement favorables au projet

Exercice 4 Candidat/e/s n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

1. $z_1 = \left(1 + \dfrac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \dfrac{7}{6} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{7}{6} \times \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{7}{12} + \mathrm{i}\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$:

$$z_1 = \frac{7}{12} + \mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}$$

2. $z_0 = \left(1 + \dfrac{0}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2 \times 0 \times \pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i} \times 0} = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$: $z_1 = 1$

$z_6 = \left(1 + \dfrac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2 \times 6 \times \pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i} \times 2\pi} = 2(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 2$: $z_6 = 2$

3.

Soit H_1 le pied de la hauteur du triangle OM_0M_1 issue de M_1.
Dans le triangle rectangle OM_1H_1, on a $\sin \widehat{M_0OM_1} = \dfrac{H_1M_1}{OM_1}$, soit

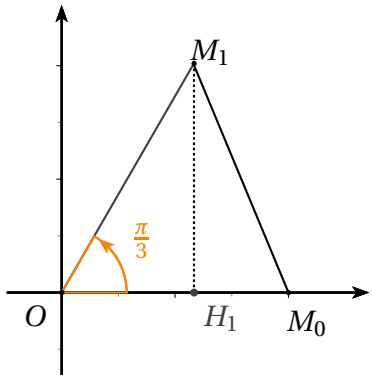
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{H_1M_1}{\frac{7}{6}}$$

On en déduit :

$$H_1M_1 = \frac{7}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors égale, en u.a, à

$$\frac{OM_0 \times H_1M_1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$



Partie B

1.

$$OM_k = |z_{M_k}| = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = \left|1+\frac{k}{n}\right| \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}$$

2. Par hypothèse, on a : $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$. Puisque $1+\dfrac{k}{n} > 0$, alors $\arg(z_k) = \dfrac{2k\pi}{n}\ [2\pi]$.

Par suite :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) = Arg\,(z_k) = \frac{2k\pi}{n}\ [2\pi] \qquad (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = Arg\,(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}\ [2\pi]$$

3.

$$(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, notons H_{k+1} le pied de la hauteur issue du point M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

- Si $n = 2$, le triangle OM_0M_1 est plat : on a alors $M_1H_1 = 0$
- Si $n = 3$,
- Supposons $n \geqslant 3$:

Le point H_k appartient alors au segment $[OM_k]$ *sauf si* $n = 3$. Dans les deux cas, on a

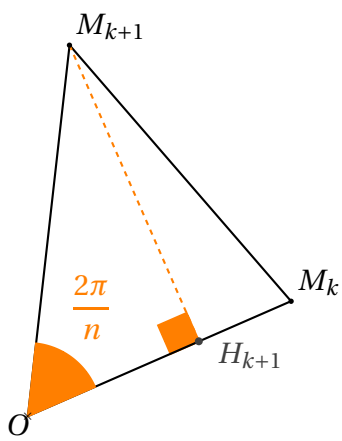
$$\left|\sin(\overrightarrow{OH_{k+1}}, \overrightarrow{OM_{k+1}})\right| = \left|\sin(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}\right| = \sin\frac{2\pi}{n}$$

Par suite :

$$\sin H_{k+1}\widehat{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{OM_{k+1}} = \frac{M_{k+1}H_{k+1}}{1+\frac{k+1}{n}}$$

Puis :

$$M_{k+1}H_{k+1} = \left(1+\frac{k+1}{n}\right) \times \sin\frac{2\pi}{n}\ [2\pi]$$



4.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5. Les deux lignes à compléter sont

L6 : Tant que $A < 7{,}2$

et

L13 : Afficher n

Remarque : on obtient n = 20.

Exercice 4 Candidat/e/s ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

D'une part :

$$\text{HI} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ B \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\text{LL} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

Le mot HILL est chiffré par le mot ZBZY

Partie B

1. Puisque a et 26 sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de Bèzout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + 26v = 1$$

Puisque $26 \equiv 0 \mod 26$, alors $26v \equiv 26 \times 0 \mod 26$, soit $26v \equiv 0 \mod 26$.
En ajoutant au à chacun des deux membres de la congruence précédente, on obtient :

$$au + 26v \equiv au \mod 26$$

soit

$$au \equiv 1 \mod 26$$

P.G.C.D (a,26)=1 $\Longrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad a \times u \equiv 1 \mod 26$

2. a.

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	16	11	6	1

b. L'algorithme affiche 5, qui est donc le plus petit entier u tel que $a \times u \equiv 1 \mod 26$. Par suite :

$$5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$$

3. a.
$$\begin{aligned}
12A - A^2 &= 12\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix}\\
&= 12\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\times 5+2\times 7 & 5\times 2+2\times 7\\ 7\times 5+7\times 7 & 7\times 2+7\times 7\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}60 & 24\\ 84 & 84\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}39 & 24\\ 84 & 63\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}21 & 0\\ 0 & 21\end{pmatrix}\\
&= 21\times I
\end{aligned}$$

b. L'égalité $12A - A^2 = 21I$ s'écrit $(12I - A)\times A = 21I$. Par suite :

$$B = 12I - A$$

c. Supposons :

$$A\times X = Y$$

Multiplions chacun des deux membres de l'égalité (à gauche) par B :

$$B\times A\times X = B\times Y$$

Puisque $BA = 21I$, l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$21X = BY$$

On a prouvé :

$$AX = Y \Longrightarrow 21X = BY$$

Partie C

1. Puisque, par hypothèse, Y=AX, on en déduit, d'après la partie précédente :

$$21X = BY$$

où B est la matrice $12I - A = \begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}$

• On a d'une part $21X = \begin{pmatrix}21x_1\\ 21x_2\end{pmatrix}$

• D'autre part :

$BY = \begin{pmatrix}7 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7y_1 - 2y_2\\ -7y_1 + 5y_2\end{pmatrix}$ On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l}21x_1 = 7y_1 - 2y_2\\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2\end{array}\right.$$

2. Multiplions chacune des deux égalités ci-dessus par 5 :

$$\left\{\begin{array}{l}105x_1 = 35y_1 - 10y_2\\ 105x_2 = -35y_1 + 25y_2\end{array}\right.$$

• Prouvons : $x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$:

Puisque $105 \equiv 1 \mod 26$, alors

$$105x_1 \equiv x_1 \mod 26 \ (a)$$

De $\begin{cases} 35 \equiv 9 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_1 \equiv r_1 \mod 26 \end{cases}$, on déduit, par somme : $35y_1 \equiv 9r_1 \mod 26$ (1).

De $\begin{cases} -10 \equiv 16 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_2 \equiv r_2 \mod 26 \end{cases}$, on déduit, par somme : $-10y_2 \equiv 16r_2 \mod 26$ (2).

En ajoutant membre à membre les congruences (1) et (2), on obtient

$$35y_1 - 10y_2 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \ (b)$$

De (a) et (b) on déduit :

$$x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$$

• Un raisonnement analogue montre que

$$x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26$$

3.

$$VL \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 365 \\ 632 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow BI$$

$$UP \rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 715 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow EN$$

VLUP code le mot BIEN