Correction des exercices donnés lors du stage de mars 2010

I

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. On a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

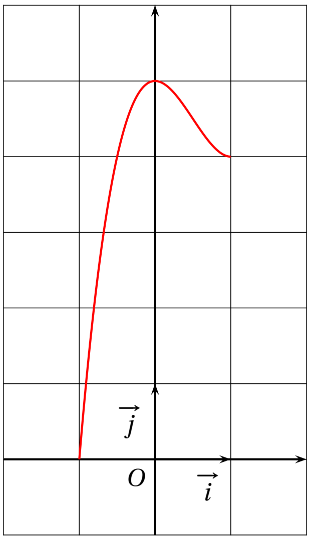
   - $f(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 0$.
   - $f(0) = 5 \Leftrightarrow d = 5$.
   - $f(1) = 4 \Leftrightarrow a + b + c + d = 4$
   - $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$

   On en déduit que a, b, c et d sont solutions du système $\begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ d=5 \\ a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$.

   $$\begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ d=5 \\ a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ -a+b-c=-5 \\ a+b+c=-1 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ b=-3 \\ a+c=-3 \\ 3a+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ b=-3 \\ a=2 \\ c=0 \end{cases}$$

   Par consqéquent : $\boxed{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5}$.

2. Représentation graphique :



3. Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ (donc $P(x) = f(x)$).

   (a) $P(-1) = 0$
   $P(x)$ peut donc se factoriser par $(x - (-1))$ donc par $(x+1)$.
   $P(x) = (x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$
   En développant, on trouve : $(x+1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\alpha+\beta)x^2 + (\beta+\gamma)x + \gamma$.
   On identifie alors les coefficients ; on obtient le système :
   $$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha+\beta = -3 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 5 \end{cases}.$$
   Par conséquent : $P(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 5)$

   (b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $2x^2 - 5x + 5 = 0$.

   - $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
   - $2x^2 - 5x + 5 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta < 0$

   Par conséquent : $\mathscr{S} = \{-1\}$

II

$f(x) = \dfrac{x^3 + 10x}{x^2+1}$

1. $ax + \dfrac{bx}{x^2+1} = \dfrac{ax(x^2+1)+bx}{x^2+1} = \dfrac{ax^3+(a+b)x}{x^2+1}$.

   Pour que $f(x) = ax + \dfrac{bc}{x^2+1}$ pour tout x, il faut et il suffit que les coefficients du numérateur soient les mêmes (on identifie les coefficients).

   On obtient le système : $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 10 \end{cases}$ dont les solutions sont $a = 1$ et $b = 9$.

   Par conséquent : $\boxed{f(x) = x + \dfrac{9x}{x^2+1}}$.

2. Pour tout x, $f(-x) = -x + \dfrac{-9x}{(-x)^2+1} = -x - \dfrac{9x}{x^2+1} = -\left[x + \dfrac{9x}{x^2+1}\right] = -f(x)$.

   Pour tout x, $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire. (La courbe est donc symétrique par rapport à l'origine O).

3. Pour étudier les variations de f, étudions le signe de $f'(x)$.

   $f(x) = x + 9 \times \dfrac{x}{x^2+1}$. On peut voir f comme : $f = u + 9 \times \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$, $v(x) = x^2+1$.

   Alors : $f' = u' + 9 \times \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. Pour tout x, $f'(x) = 1 + 9 \times \dfrac{1 \times (x^2+1) - 2x \times x}{(x^2+1)^2} = 1 + \dfrac{9(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2 + 9(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

   $= \dfrac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2+1)^2}$.

   Il est clair que le dénominateur est positif (carré d'un réel).

   $f'(x)$ est du signe du numérateur.

   Pour étudier le signe de $x^4 - 7x^2 + 10$, posons $X = x^2$.

   $x^4 - 7x^2 + 10 = X^2 - 7X + 10$ (trinôme du second degré).

   $\Delta = 9 > 0$ donc il y a deux racines, qui sont 2 et 5.

   On en déduit : $X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$ donc $x^4 - 7x^2 + 10 = (x^2-2)(x^2-5) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

   Comme f est impaire, on peut de restreindre à étudier f sur $\mathbb{R}^+$.

   $x^2 - 2$ est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur des racines et $x^2 - 5$ est positif également à l'extérieur de ses racines.

   On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2-2		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\sqrt{2})$	↘	$f(\sqrt{5})$	↗	

4. Puisque $f(x) = x + \dfrac{9x}{x^2+1}$, $f(x) - x = \dfrac{9x}{x^2+1}$.

   $\dfrac{9x}{x^2+1}$ est une fraction rationnelle, donc sa limite à l'infini est celle du quotient des termes de plus haut degré.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{x} = 0$

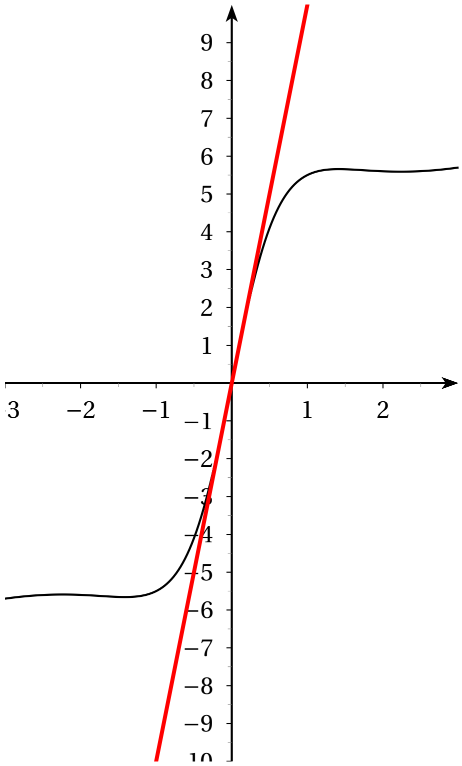
   Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.

   De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 0$.

   On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. La tangente en 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = 10$.

   Tracé de la courbe :



III

$f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$

1. Ensemble de définition :
   Résolvons l'équation $x^2+2x-3=0$; $\Delta = 16 > 0$; il y a deux racines : -3 et 1.
   Par conséquent, f est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\ ;\ 1\}}$.
   Sur cet ensemble $\mathscr{D}_f$, f est dérivable.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+2$ et $v(x) = x^2+2x-3$.
   $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x+2$.
   Alors : $f'(x) = \dfrac{2(x^2+2x-3)-(2x+2)^2}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2} = \boxed{\dfrac{-2(x^2+2x+5)}{(x^2+2x-3)^2}}$.
   $f'(x)$ est du signe du numérateur.
   x^2+2x+5 a un discriminant Δ négatif, donc x^2+2x+5 est toujours positif ; on en déduit que $f'(x)$ est toujours négatif sur $\mathscr{D}_f$.
   f est donc décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

$f(x)$ est une fraction rationnelle ; ses limites à l'infini sont celles du quotient de termes de plus haut degré.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0.$
  On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
  f n'est pas défini en -3 ; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} (2x+2) = -4 < 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} (x^2+2x-3) = 0$ avec $x^2+2x-3 > 0$.
  On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = -\infty$.
  On trouverait de même que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = +\infty$ (car le dénominateur est alors négatif, tout comme le numérateur).
  De même, on trouve : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

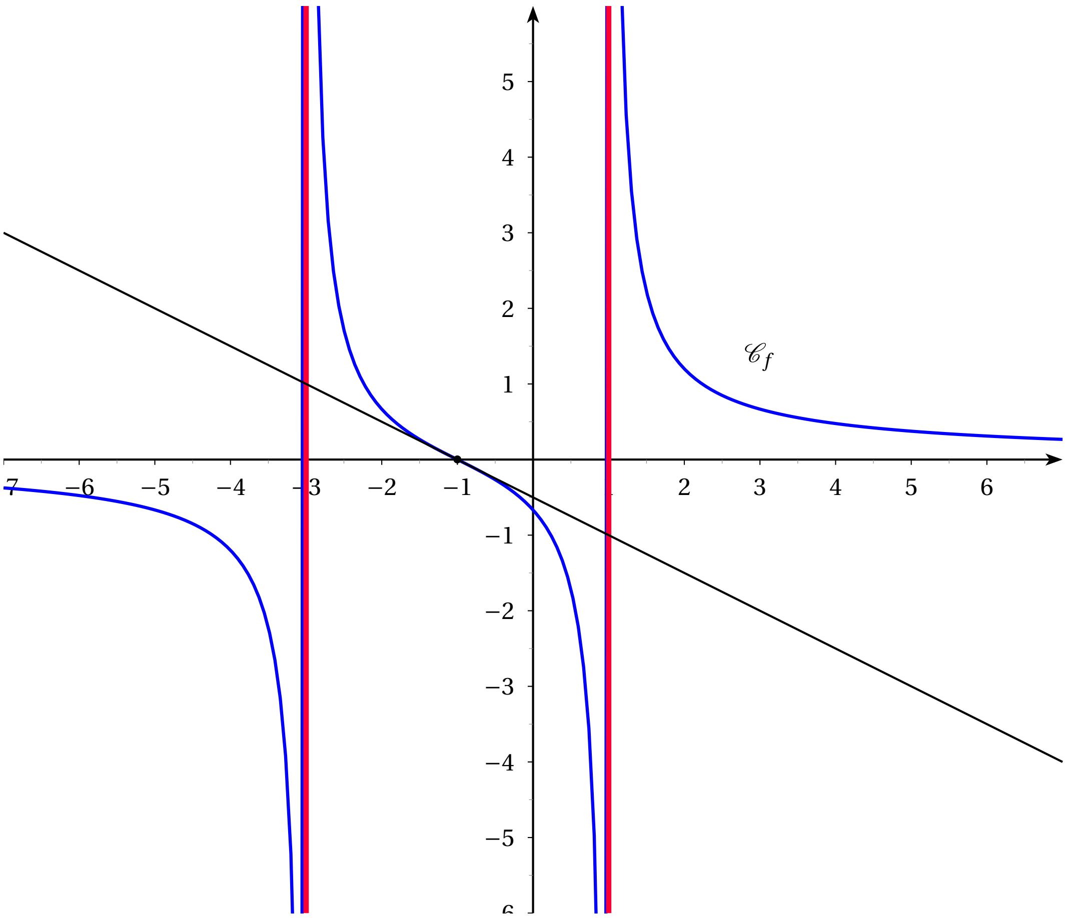
x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	‖ $-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 0$	

- (a) Intersection avec l'axe des abscisses : on résout l'équation $f(x)=0$.
  $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ (rappel : $\dfrac{a}{b}=c \Leftrightarrow a=bc$ donc $\dfrac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$).
  La courbe coupe l'axe des abscisses au point $\boxed{I(-1\,;\,0)}$.

  (b) Montrons que Iest centre de symétrie.
  Rappel : $I(a\,;\,b)$ est centre de symétrie d'une courbe $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à a et si, pour tout x, $f(a-x)+f(a+x)=2b$ (I doit être le milieu du segment joignant les points de coordonnées $(a-x\,;\,f(a-x))$ et $(a+x\,;\,f(a+x))$ donc $\dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$).
  $\mathscr{D}_f$ est bien symétrique par rapport à -1.
  Pour tout x :
  $f(-1-x)+f(-1+x)=\dfrac{2(-1-x)+2}{(-1-x)^2+2(-1-x)-3}+\dfrac{2(-1+x)+2}{(-1+x)^2+2(-1+x)-3}=\dfrac{-2x}{x^2-4}+\dfrac{2x}{x^2-4}=0.$
  $\boxed{I(-1\,;\,0) \text{ est bien centre de symétrie de la courbe } \mathscr{C}_f}$.

  (c) La tangente à $\mathscr{C}_f$ en I a pour équation réduite :
  $y=f'(-1)(x-(-x))+f(-1)$ donc : $y=-\dfrac{1}{2}(x+1)+0 \Leftrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}}$

- Courbe



- $mx^2+2(m-1)x-(3m+2)=0 \Leftrightarrow m(x^2+2x-3)-2x-2=0 \Leftrightarrow m(x^2+2x-3)=2x+2 \Leftrightarrow m=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=m}$.
  On doit donc trouver graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ selon les valeurs de m. (on peut aussi s'aider du tableau de variations).
  Pour $m<0$, l'équation a deux solutions.
  Pour $m=0$, l'équation a une solution, qui vaut -1.
  Pour $m>0$, l'équation a deux solutions.

IV

f est définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+a}$ $(a>0)$.

1. Pour tout x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+a \geqslant a>0$ car $a>0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x, $f(-x)=\dfrac{2\times(-x)}{(-x)^2+a}=\dfrac{-2x}{x^2+a}=-\dfrac{2x}{x^2+a}=-f(x)$ donc f est impaire.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables) : $f = 2\times\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + a$.

$f' = 2\times\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = 2\times\dfrac{1\times(x^2+a) - 2x\times x}{(x^2+a)^2} = 2\times\dfrac{a-x^2}{(x^2+a)^2} = \boxed{\dfrac{2(a-x^2)}{(x^2+a)^2}}$.

La courbe admet en 1 une tangente horizontale si, et seulement si, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = \dfrac{2(a-1)}{(x^2+a)^2}$ donc $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$.

4. On prend $a = 1$ (valeur trouvée justement à la question 3.)

Alors : $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$.

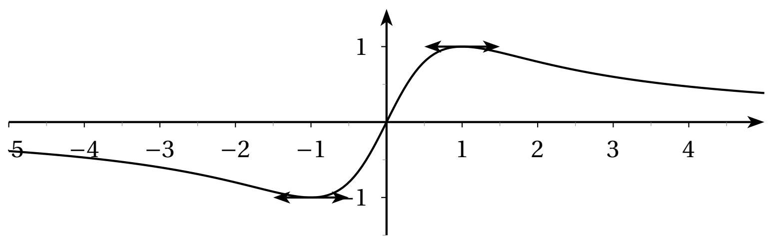
$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$.

$f'(x)$ est du signe de $(1+x)(1-x)$, donc négatif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur des deux racines.

Le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe :



V

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

1. $f(x) = ax + b + c\dfrac{\times 1}{x+1}$ donc on peut voir f comme $f = u + c\times\dfrac{1}{v}$ de dérivée $f' = u' + c\times\left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' + c\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)$ avec $u(x) = ax + b$, $u'(x) = a$, $v(x) = x+1$ et $v'(x) = 1$.

Alors : $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

D'après le tableau de variations, on a : $f'(-2) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$.

On en déduit le système :

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ -2a + b - c = -2 \\ b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a + b = 2 \\ -3a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

On en déduit : $\boxed{f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}}$

2. $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$; $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x+1] = 0)$.

La droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ qui est du signe de $x+1$.

Pour $x > -1$, $x + 1 > 0$, donc $\dfrac{1}{x+1} > 0$ et $f(x) - (x+1) > 0$.

Pour $x < -1$, $x + 1 < 0$, donc $\dfrac{1}{x+1} < 0$ et $f(x) - (x+1) < 0$.

Pour $x = -1$, $f(x) - (x+1) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ coupe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1. $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ pour $x > -1$ et en dessous pour $x < -1$.

VI

Soit f définie sur $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$.

1. D'après le tableau de variations, on a : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$, $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\ln\dfrac{5}{8}$.

   $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln\left(\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+c\right)=0$ donc $\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+c=1$.

   $f(0)=\ln c=0$ donc $c=1$.

   $f\dfrac{1}{4}=\ln\left(\dfrac{a}{16}+\dfrac{b}{4}+c\right)=\ln\dfrac{5}{8}$ donc $\dfrac{a}{16}+\dfrac{b}{4}+c=\dfrac{5}{8}$.

   On en déduit que a, b et c sont solutions du système :

   $$\begin{cases} c=1 \\ \dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+c=1 \\ \dfrac{a}{16}+\dfrac{b}{4}+c=\dfrac{5}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ \dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}=0 \\ \dfrac{a}{16}+\dfrac{b}{4}=-\dfrac{3}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a-2b=0 \\ a+4b=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-1 \\ a=-2\end{cases}.$$

   On en déduit que $\boxed{f(x)=\ln(-2x^2-x+1)}$.

   Remarque : $-2x^2-x+1=(-2x+1)(x+1)$ qui est strictement positif si, et seulement si, x appartient à $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

2. $f=\ln\circ u$ donc $f'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=-2x^2-x+1$.

   On en déduit que $\boxed{f'(x)=\dfrac{-4x-1}{-2x^2-x+1}}$.

3. Le dénominateur est positif donc $f'(x)$ est du signe du numérateur.

   $f'(x)=0\Leftrightarrow -4x-1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$.

4. $f'(x)>0\Leftrightarrow -4x-1>0\Leftrightarrow -4x>1\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.

   $f'(x)<0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}$.

   f est donc croissante sur $]-1\,;\,-\dfrac{1}{4}$ puis décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

   On retrouve bien le tableau de variations.

   Le maximum est $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\ln\dfrac{9}{8}$

VII

Partie A

g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x+1+\ln x$.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$.

   $g'(x)=1+0+\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x}>0$ car sur $]0\,;\,+\infty[$, x et $x+1$ sont strictement positifs.

   On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et g est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur cet intervalle.

   Comme g est strictement croissante, cette solution est unique ; notons la α.

   Avec une calculatrice, on trouve que $f(0{,}27)\approx -0{,}039<0$ et $g(0{,}28)\approx 0{,}0070>0$. On en déduit que : $\boxed{0{,}27<\alpha<0{,}28}$.

   (b) $g(x)<0$ pour $x<\alpha$; $g(\alpha)=0$ et $g(x)>0$ pour $x>\alpha$.

Partie B

Soit f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4x\ln x}{x+1}$.

1. **Limite en 0 :** D'après une formule du cours, $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0}$.

   Limite en $+\infty$: on a une forme indéterminée, car le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$.

   Pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{4x\ln x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{4\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(4\ln x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ donc par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2. (a) f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables :

   $f=4\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x\ln x$ et $v(x)=x+1$.

   $f'=4\times\left(\dfrac{u}{v}\right)'=4\times\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$u'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$ (on dérive u comme un produit) ; $v'(x) = 1$.

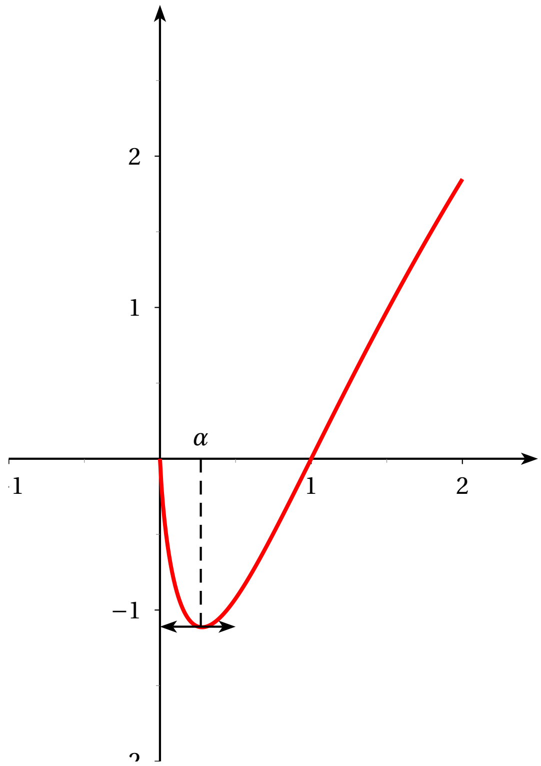
Par conséquent : $f'(x) = 4 \times \dfrac{(1+\ln x)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = 4 \times \dfrac{x+1+x\ln x + \ln x - x\ln x}{(x+1)^2} = 4 \times \dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{4g(x)}{(x+1)^2}}$.

(b) Le dénominateur est positif, de même que 4, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, c'est-à-dire négatif sur $]0\,;\,\alpha[$, nul pour $x = \alpha$ et positif pour $x > \alpha$.

(c) Tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tableau de valeurs (à faire à la calculatrice)
4. Courbe :



VIII

Partie A :

1. D'après le tableau de variations, l'ensemble de définition de f est : $(-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,=\infty[$
2. La courbe admet comme asymptote horizontale la droite D d'équation $y = 1$ et comme asymptote verticale la droite D' d'équation $x = 1$.

   Le point A en lequel la tangente à $(\mathscr{C})$ est horizontale a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.

   La courbe est à la fin.

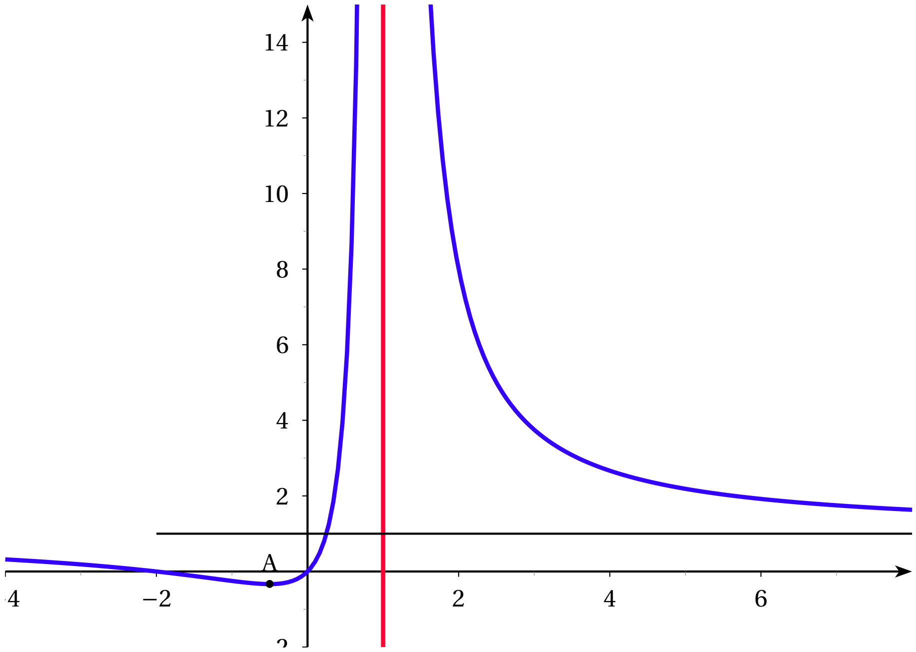
Partie B :

f est définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2 + 4(x-1) + 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$. Les solutions sont -2 et 0 : $\boxed{\mathscr{S} = \}-2\,;\,0\}}$.

   $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2 + 4(x-1) + 3}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + 3 = (x-1)^2 \Leftrightarrow 4(x-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$: $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}}$.
2. Tableau de valeurs à faire avec la calculatrice.

3. Courbe :



IX

1. (a)

x	0	1
$f(x)$	2	1
$f'(x)$	-3	0

En effet, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A, qui passe par les points A et B de coordonnées $(0\,;\,2)$ et $(1\,;\,-1)$; le coefficient directeur vaut alors $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

En 1, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(1) = 0$.

(b) Le tableau de variations est :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On considère la fonction g définie par $g = \dfrac{1}{f}$, de dérivée g'.

(a) $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = \dfrac{1}{2}$; $g(1) = \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{1}{1} = 1$; $g(3) = \dfrac{1}{f(3)} = \dfrac{1}{2}$.

(b) f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$; g est la composé de la fonction f et de la fonction inverse, décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
Les variations de g sont donc contraires à celles de f.
g est croissante sur $[0\,;\,1]$ puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

(c) $g = \dfrac{1}{f}$ donc $g' = \left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

On en déduit que : $g'(0) = -\dfrac{f'(0)}{f^2(0)} = -\dfrac{-3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$; $\boxed{g'(0) = \dfrac{3}{4}}$.

$g'(1) = -\dfrac{f'(1)}{f^2(1)} = -\dfrac{0}{1^2} = 0$: $\boxed{g'(1) = 0}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.

X

Partie I

Graphiquement, on trouve que l'équation $f(x)=0$ a pour solution $x=1$: $boxed\mathscr{S}=\{1\}$.
$f(x)$ est positif sur l'intervalle $[1~;~6]$.

Partie B

$g=\dfrac{1}{f}$.

1. (a) $g(2)=\dfrac{1}{f(2)}=\dfrac{1}{1}=1$; $\boxed{g(1)=1}$.

   $g(4)=\dfrac{1}{f(4)}=\dfrac{1}{4}$; $\boxed{g(4)=\dfrac{1}{4}}$

   $g(6)=\dfrac{1}{f(6)}=\dfrac{1}{1}=1$; $\boxed{(6)=1}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=0$ avec $f(1)\geqslant 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1} g(x)=+\infty$; $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to1} g(x)=+\infty}$.

   On en déduit que la droite d'équation $x=1$ est asymptote (verticale) à la courbe (Γ).

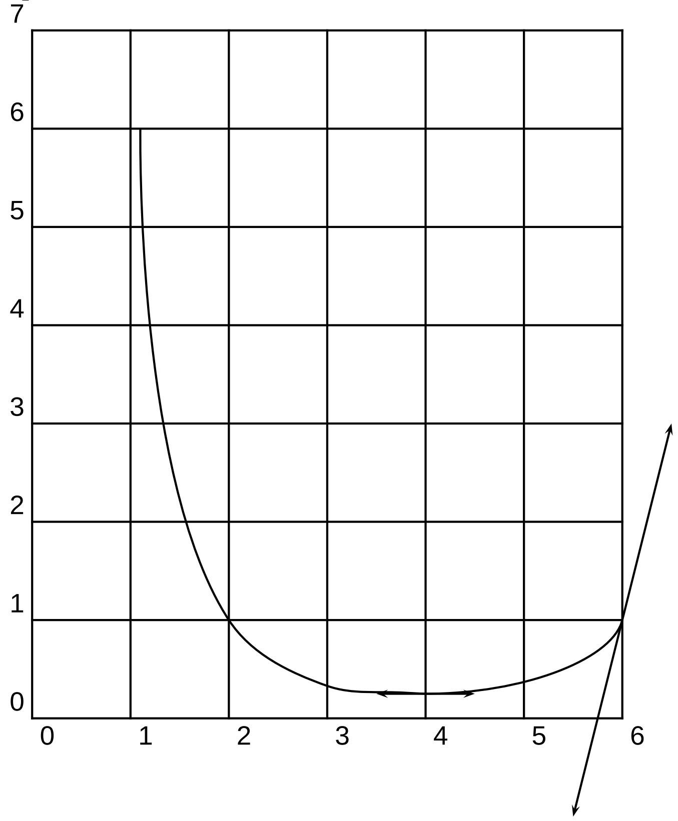
   (c) g est la composée de la fonction f et de la fonction inverse ; f est positive sur $[1~;~6]$ et $f(x)>0$ sur $]1~;~6]$; on en déduit que les variations de g sont contraires à celles de f.

   g est décroissante sur $]1~;~4]$ et croissante sur $[4~;~6]$.

x	1	4	6
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\dfrac{1}{4}$	↗ 1

   (d) $f'(4)=0$: $g'=-\dfrac{f'}{f^2}$ (voir exercice précédent) donc $f'(4)=-\dfrac{0}{4^2}=0$; $\boxed{g'(4)=0}$.

   (e) $f'(6)=-4$ donc $g'(6)=-\dfrac{f'(6)}{f^2(6)}=4$



XI

$f(x)=x^2(a+b\ln x)$.

Partie A

1. $f=uv$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=a+b\ln x$; $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\dfrac{b}{x}$.

   Alors : $f'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=2x(a+b\ln x)+x^2\times\dfrac{b}{x}=\boxed{2x(a+b\ln x)+bx=x(2a+b+2b\ln x)}$.

2. $f(1)=3 \Leftrightarrow 1^2(a+b\ln 1)=3 \Leftrightarrow a=3$ car $\ln 1=0$.
$f'(1)=4 \Leftrightarrow 2a+b=4 \Leftrightarrow b=-2$.
Par conséquent : $\boxed{f(x)=x^2(3-2\ln x)}$.

3. D est la tangente en A(1 ; 3) ; son coefficient directeur est 4 donc son équation réduite est : $y=4(x-1)+f(1)$ soit : $y=4(x-1)+3$ donc $\boxed{y=4x-1}$.

4. L'abscisse de P, point pour lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses est solution de l'équation $f'(x)=0$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(4-4\ln x)=0 \Leftrightarrow 4x(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\text{e}$.
L'abscisse de P est donc e.

5. $f'(x)=4x(1-\ln x)$; sur $[4\,;\,+\infty[$, $4x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln x$; or $1-\ln x$ s'annule pour $x=\text{e}$ et est négatif pour $x>\text{e}$, donc pour $x>4$.
f est donc décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} w^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2\ln x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
f est continue sur $[4\,;\,+\infty[$; $f(4)=16(3-2\ln 4)=16(3-4\ln 2)>3$; $f(5)=25(3-2\ln 5)<3$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=3$ a une solution (au moins) dans $[4\,;\,5[$; comme f est décroissante sur cet intervalle, cette solution est unique ; notons la α.
On trouve $\boxed{\alpha \approx 4,48}$

Partie B

1. Soit g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=x^3(11-6\ln x)$.
$g'(x)=3x^2(11-6\ln x)+x^3\times\left(-\dfrac{6}{x}\right)=3x^2(11-6\ln x)-6x^2=x^2(33-18\ln x-6)=x^2(27-18\ln x)=9x^2(3-2\ln x)$.
Par conséquent : $\boxed{g'(x)=9x^2(3-2\ln x)=9f(x)}$.

2. La valeur exacte de l'aire de la partie du plan entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\text{e}$ est égale, en unités d'aire, à : $\mathscr{A}=\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x=F(\text{e})-F(1)$ où F est une primitive de f.
On a trouvé à la question précédente $g'=9f$ donc $f=\dfrac{1}{9}g'$; une primitive de f est alors $F=\dfrac{1}{9}f$.
Alors : $F(\text{e})=\dfrac{1}{9}g(\text{e})$; $F(1)=\dfrac{1}{9}g(1)$.
$F(\text{e})-F(1)=\dfrac{1}{9}(g(\text{e})-g(1))=\dfrac{1}{9}\left(5\text{e}^3-11\right)$.
Une unité d'aire vaut 4 cm^2 car l'unité vaut 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
On en déduit : $\mathscr{A}=\dfrac{1}{9}\left(5\text{e}^3-11\right)$ $u.a$ donc $\boxed{\mathscr{A}=\dfrac{4}{9}\left(5\text{e}^3-11\right)\ \text{cm}^2}$

Partie C

1. $m(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ donc $m'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\dfrac{4x^2(1-\ln x)-x^2(3-2\ln x)}{x^2}=4(1-\ln x)-(3-2\ln x)=1-2\ln x$.
$\boxed{m'(x)=1-2\ln x}$.
$m'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\text{e}^{\frac{1}{2}}$.
$m'(x)>0 \Leftrightarrow 1-2\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<\text{e}^{\frac{1}{2}}$.
On en déduit le tableau de variations de m :

x	0		$\text{e}^{\frac{1}{2}}$		4
$m'(x)$		$+$	0	$-$	
$m(x)$		$\nearrow$	$m\left(\text{e}^{\frac{1}{2}}\right)$	$\searrow$	

2. Le maximum de m a lieu pour $x=\text{e}^{\frac{1}{2}}\approx 3,162$, soit 3162 objets ; $k=3162$.

3. Le coût moyen maximal est $m(3,162)\approx 2,20578$ milliers d'euros, donc environ 2205,78 euros.

XII

f est définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=2+\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}=2+a\times\dfrac{1}{x+1}+b\times\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

1. (a) $f=2+a\times\dfrac{1}{u}+b\times\dfrac{1}{u^2}$ avec $u(x)=x+1$.

   On en déduit : $f'=a\times\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)+b\times\left(-\dfrac{2u'}{u^3}\right)$ avec $u'(x)=1$.

   Pour tout $x>-1$, $\boxed{f'(x)=-\dfrac{a}{(x+1)^2}-\dfrac{2b}{(x+1)^3}}$.

   (b) D'après le tableau de variations, on a : $f'(1)=0$ qui donne $-\dfrac{a}{4}-\dfrac{2b}{8}=0$ d'où $a=-b$.

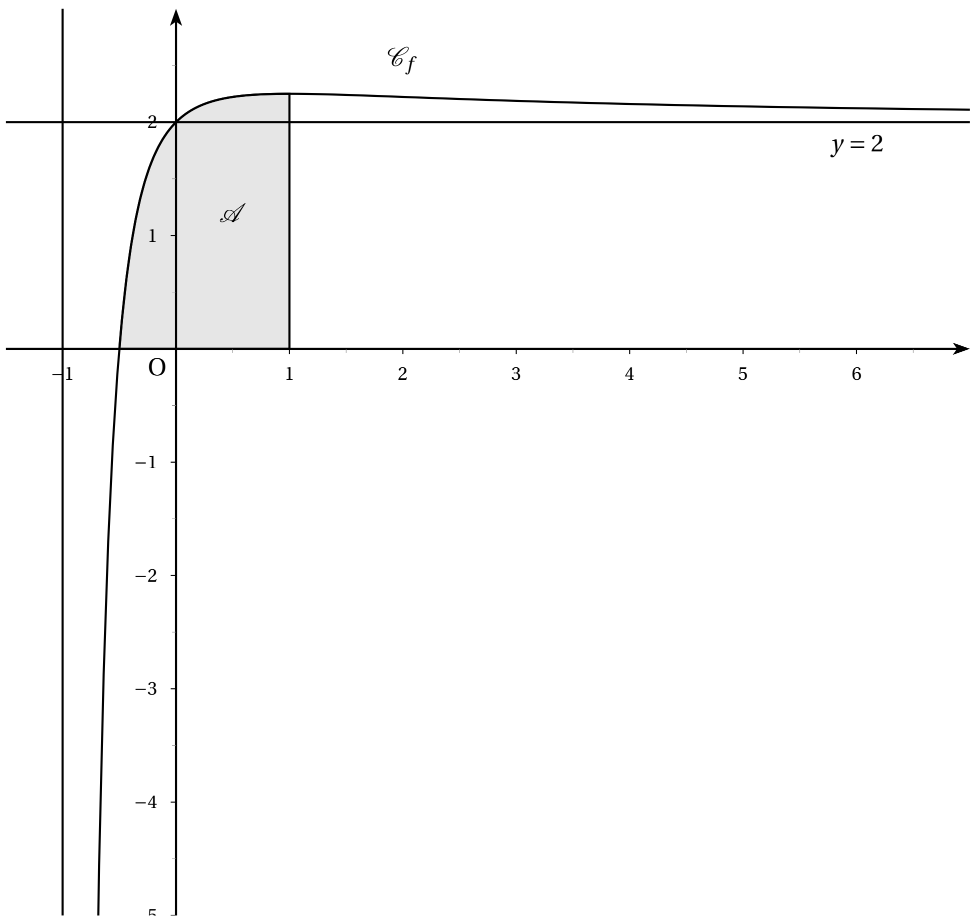
   $f(1)=\dfrac{9}{4}2+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}=\dfrac{9}{4}2a+b=1$ (après transformations).

   On a donc le système : $\left\{\begin{array}{l} a=-b \\ 2a+b=1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1\end{array}\right.$.

   Par conséquent ; $\boxed{f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}}$

2. Sur $[1\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ n'a aucune solution, puisque la fonction est décroissante et que le minimum est 2.
   Sur $]-1\,;\,1]$, $f(x)$ prend des valeurs négatives (donc inférieures à 1) puisque $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$; $f(x)$ prend des valeurs supérieures à 1 puisque $f(1)=\dfrac{9}{4}>1$.
   f est continue (somme et quotient de fonctions continues) donc, d'près le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ a (au moins) une solution dans l'intervalle $---1\,;\,1]$.
   Comme f est croissante sur cet intervalle, la solution est unique. Notons-la α.
   $f(-0,5)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $-0,5<\alpha<1$.
   À la calculatrice, on trouve $\boxed{-0.39<\alpha<-0,38}$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ donc $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x=-1$ comme asymptote.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y=2$ comme asymptote (parallèle à l'axe des abscisses).
   Courbe :



4. (a) Signe de $f(x)$.

On a vu que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. D'après le tableau de variations, on a :

x	-1 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad +\infty$
Signe de $f(x)$	$-$ $\quad 0$ $\quad +$

(b) En posant $u(x)=x+1$, on a $u'(x)=1$ donc f s'écrit : $f=2+\frac{u'}{u}-\frac{u'}{u^2}$.

Alors, une primitive de f (fonction F telle que $F'=f$) est : $F(x)=2x+\ln(u(x))-\frac{1}{u(x)}$, c'est-à-dire :

$$F(x)=2x+\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}.$$

(c) Comme f est positive sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,1\right]$, l'aire cherchée, exprimée en unités d'aire, est : $\mathscr{A}=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathscr{A}=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$F(1)=2+\ln(2)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\ln(2)$.

$F(-\frac{1}{2})=-3+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-3-\ln(2)$.

On en déduit que : $\mathscr{A}=\left(\frac{3}{2}+\ln(2)\right)-(-3-\ln(2))=\frac{9}{2}+2\ln(2)$ en unités d'aire.

L'unité graphique étant 2 cm, une unité d'aire vaut 4 cm^2 donc : $\mathscr{A}=18+8\ln(2)$ cm^2.

5. $g=\ln\circ f$ a pour ensemble de définition $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ car, pour pouvoir calculer $\ln[f(x)]$, il faut que $f(x)>0$.

ln est une fonction croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $g=\ln\circ f$ a les mêmes variations que f, sur son ensemble de définition.

g est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,1\right]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

XIII

Sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$.

1. $f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$.

2. (a) $x-f(x)=x-\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{\ln x}{x}$ qui est du signe de $\ln x$ sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, donc négatif sur $]0\,;\,1]$ et positif sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

   (b) On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $]0\,;\,1]$ et en dessous sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

3. Soit $g(x)=(\ln x)^2$. Alors : $g'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x=2\frac{\ln x}{x}$ (car $(u^2)'=2u'u$).

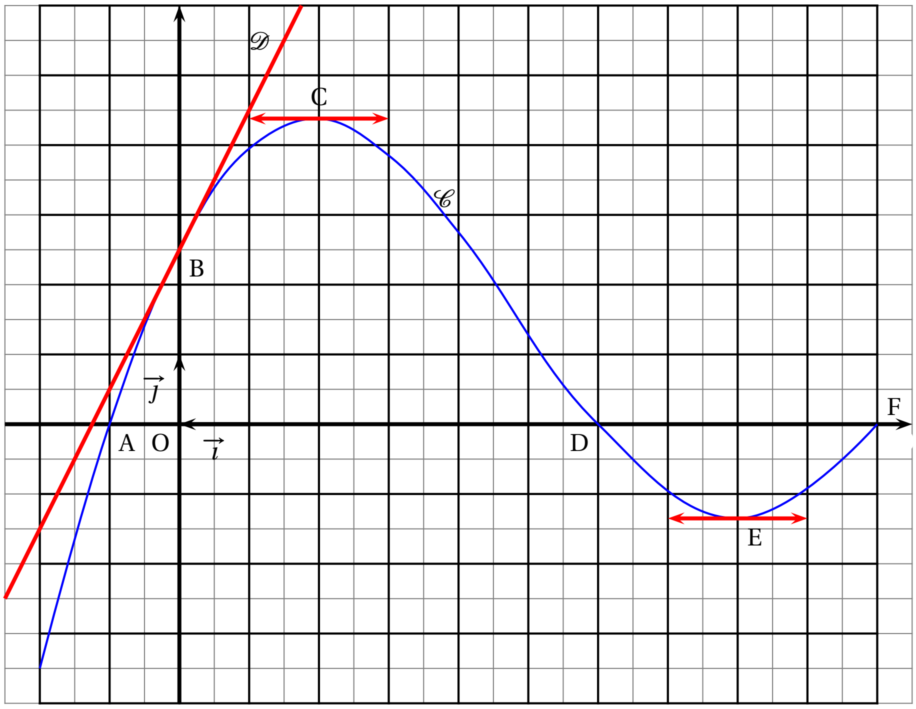
   On en déduit que $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{2}g'(x)$.

   Une primitive de la fonction $h: x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est donc $H=\frac{1}{2}g$, d'où $H(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

L'aire cherchée est : $\mathscr{A}=\int_1^{\mathrm{e}}[x-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}h(x)\,\mathrm{d}x=[H(x)]_1^{\mathrm{e}}=H(\mathrm{e})-H(1)=\frac{1}{2}(\ln\mathrm{e})^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{1}{2}$.

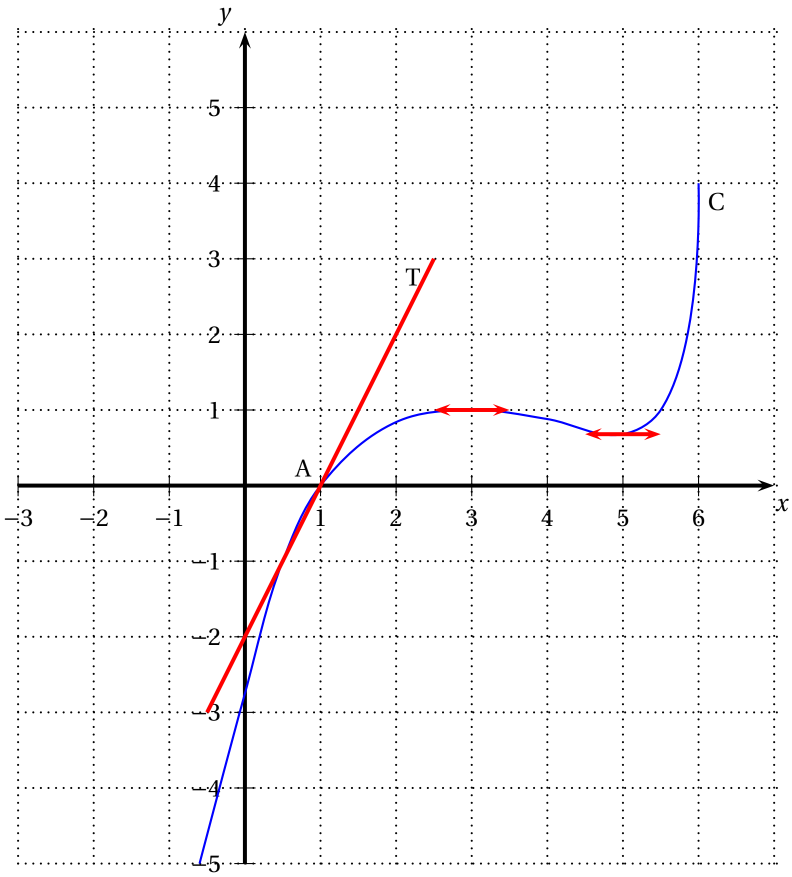
$\boxed{\mathscr{A}=\frac{1}{2}\text{ cm}^2}$.

XIV



1. Quelle est la valeur de $f'(0)$ nombre dérivé de f en 0 ?
   Par définition, $f'(0)$ est le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, c'est-à-dire en B. Les points de coordonnées $(0\,;\,2{,}5)$ et $(1\,;\,4{,}5)$ appartiennent à cette tangente. Par conséquent : $f'(0) = \dfrac{4,5-2,5}{1,0} = 2$: $\boxed{f'(0)=2}$
2. Quel est l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 0$?
   $\boxed{S = \{-1\,;\,6\,;\,10\}}$ (abscisses des poin,ts d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses)
3. À quel intervalle appartient le réel $I = \displaystyle\int_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$? (n'est faisable qu'après le chapitre sur l'intégation)
   Sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$, f est positive. I représente donc l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 5$. En comptant le nombre d'unités d'aire dans la partie considérée, on voir que cette aire est supérieure à 15. D'autre part, elle est inférieure à celle du rectangle de base $[-1\,;\,5]$ (de largeur 6) et de hauteur 5, donc d'aire 30. $I \in [15\,;\,30]$.
4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté D_g ?
   $g(x) = \ln(f(x))$ existe si, et seulement si, $f(x) > 0$ donc : $\mathrm{D}_g =]-1\,;\,6[$
5. Quelle est la valeur de $g(0)$?
   $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(2,5)$.
6. Quelle est la valeur du coefficient directeur m de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 ?
   Par définition, $m = g'(0)$; or, $g(x) = \ln(f(x))$ donc $g'(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, d'où : $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{2}{2,5} = 0,8$.
7. Quel est l'ensemble S' des solutions de l'équation $g'(x) = 0$?
   $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$. Les solutions sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale et pour lesquels $f(x) > 0$ pour que x appartienne à D_g.
   $S' = \{2\}$.
8. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1 ?
   $\displaystyle\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} \ln(f(x)) = \lim_{X\to0} \ln X = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = 0$

XV



Partie A

1. L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est $2(x-1)$ car le coefficient directeur de cette tangente est 2.
2. L'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions, car la courbe admet deux tangentes parallèles ą l'axe des abscisses.
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$.
4. La fonction $\ln f$ est définie sur $]1 ; 6]$ (car on doit avoir $f(x)>0$)
5. La fonction $\ln f$ s'annule exactement deux fois, car on a $f(x)=1$ pour deux valeurs de x.

Partie B

6. La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty ; 3]$ car, comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$, g et f ont les mêmes variations.
7. $g(x)=\exp(f(x))$ donc $g'(x)=f'(x)\times\exp(f(x))$; par conséquent, $g'(1)=f'(1)\times\exp(f(1))=2\times\mathrm{e}^0=2$
8. La fonction g s'annule exactement 0 fois, car $g(x)=\exp(f(x))$ et que l'exponentielle ne s'annule pas.

XVI

1. f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $f'(x)\leqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$ et $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$.
   La courbe correspondante à f' est donc celle de la réponse B.
2. Une primitive de f a pour dérivée f, donc $F'=f$. $f(x)\geqslant 0$ pour $x\leqslant -1$ et $f(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant -1$ donc F est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ puis croissante sur $[-1 ; +\infty[$; F a pour courbe celle de la réponse C.
3. $g(x)=\ln(f(x))$ existe si, et seulement si, $f(x)>0$ donc pour $x\in]-1 ; +\infty[$ (réponse B).
4. On a $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ donc $g'(1)\times g'(2)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}\times\dfrac{f'(2)}{f(2)}$.
   $f(1)>0$; $f(2)>0$; $f'(1)<0$ et $f'(2)<0$ donc $g'(1)\times g'(2)>0$ (Réponse A).

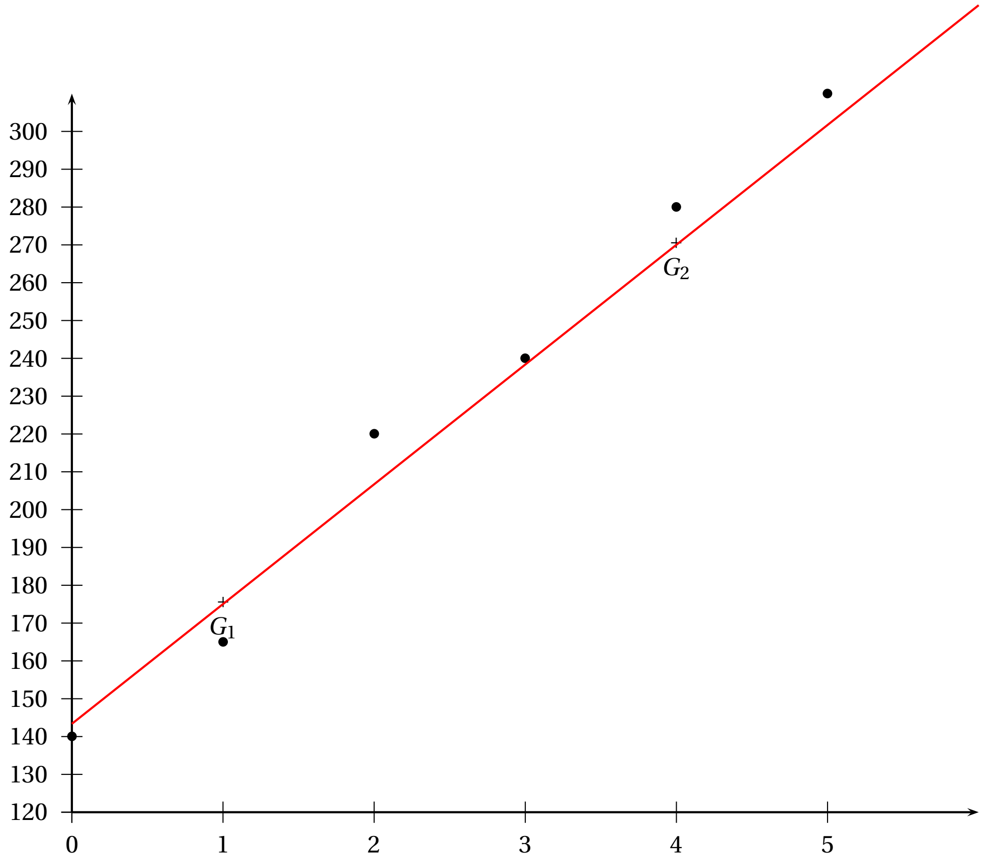
Statistiques

XVII Nouvelle Calédonie, novembre 2007

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.
Le tableau cl-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

1. Nuage de points



2. (a) On a : $G_1(1\,;\,175)$ et $G_2(4\,;\,270)$

   (b) Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) (droite de Mayer) est : $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{270-175}{4-1} = \dfrac{95}{3}$.

   L'équation réduite de la droite (G_{12}) est alors : $y = a\left(x - x_{G_1}\right) + y_{G_1}$ donc $y = \dfrac{95}{3}(x-1) + 175$ d'où $\boxed{y = \dfrac{95}{3}x + \dfrac{430}{3}}$.

   (c) L'année 2007 correspond au rang 7. En utilisant la droite (G_1G_2), le nombre d'adhérents que l'on peut alors prévoir en 2007 est :
   $\dfrac{95}{3} \times 7 + \dfrac{430}{3} = \boxed{365}$

3. On utilise maintenant l'ajustement affine obtenu par méthode des moindres carrés.
   (a) Une équation de la droite Δ obtenu par cette méthode des moindres carrés est : $y = 33x + 140$.
   (b) Pour $x = 7$, on obtient : $33 \times 7 + 140 = 371$.
   Avec cet ajustement, on peut prévoir $\boxed{371}$ adhérents en 2007.

4. (a) Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de t% est $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.

   Entre 2000 et 2005, on aurait : $140\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 310$.

   On a alors : $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = \dfrac{310}{140} = \dfrac{31}{14}$ d'où $\ln\left[\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5\right] = \ln\left(\dfrac{31}{14}\right)$ qui donne $5\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \ln\left(\dfrac{31}{14}\right)$ soit : $\ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{31}{14}\right)}{5}$.

   On en déduit : $1 + \dfrac{t}{100} = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\dfrac{31}{14}\right)}{5}\right)$ et $t = 100\left[\exp\left(\dfrac{\ln\left(\dfrac{31}{14}\right)}{5}\right) - 1\right] \approx 17,23$ à 10^{-2} près.

   On peut aussi dire que $1 + \dfrac{t}{100} = \sqrt[5]{\dfrac{31}{14}}$.

   (b) Avec cet ajustement, le nombre d'adhérents en 2007 serait : $140 \times \left(1 + \dfrac{17,23}{100}\right)^7 \approx \boxed{426}$.

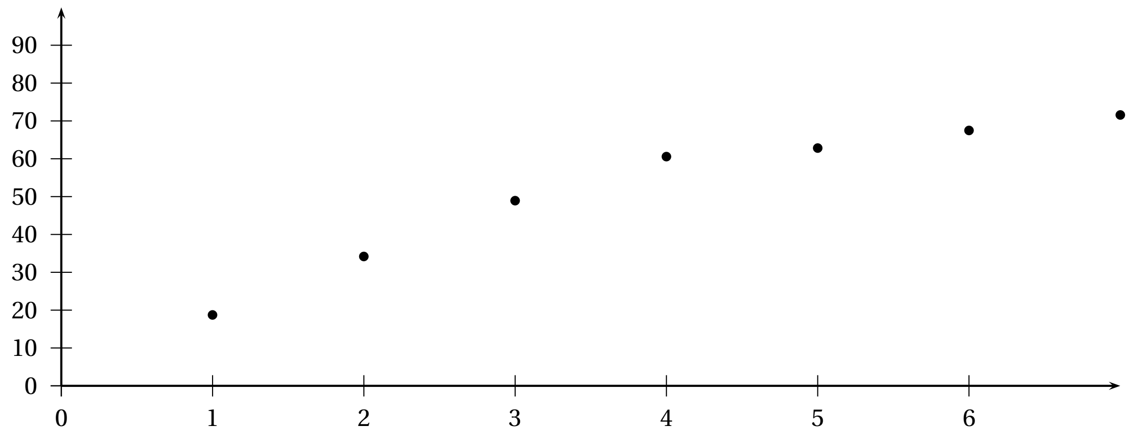
XVIII Liban mai 2006

1. (a) En 1999 le taux de pénétration est de 34,2% ; on a :
   $\dfrac{34,2}{100} \times 60,32 = 20,63$ à 10^{-2} près. En 1999, le nombre de personnes équipées d ?un téléphone mobile est de 20,63 millions.

   En 2004, le taux de pénétration est de 71,6% ; on a :
   $\dfrac{71,6}{100} \times 62,18 = 44,52$ à 10^{-2} près.
   En 2004, le nombre de personnes équipées d ?un téléphone mobile est de 44,52 millions.

   (b) $\dfrac{71,6?34,2}{34,2} \times 100 = 109,36\%$.
   Entre 1999 et 2004, le pourcentage d ?augmentation du taux de pénétration est de 109,36%.

2. Graphique :



3. On envisage un ajustement de la forme $y = a\ln(x) + b$.

(a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

   (b) Droite de régression de y en z : $y = az + b$ avec $a = 28,07$ et $b = 17,82$ à 10^{-2} près par défaut.

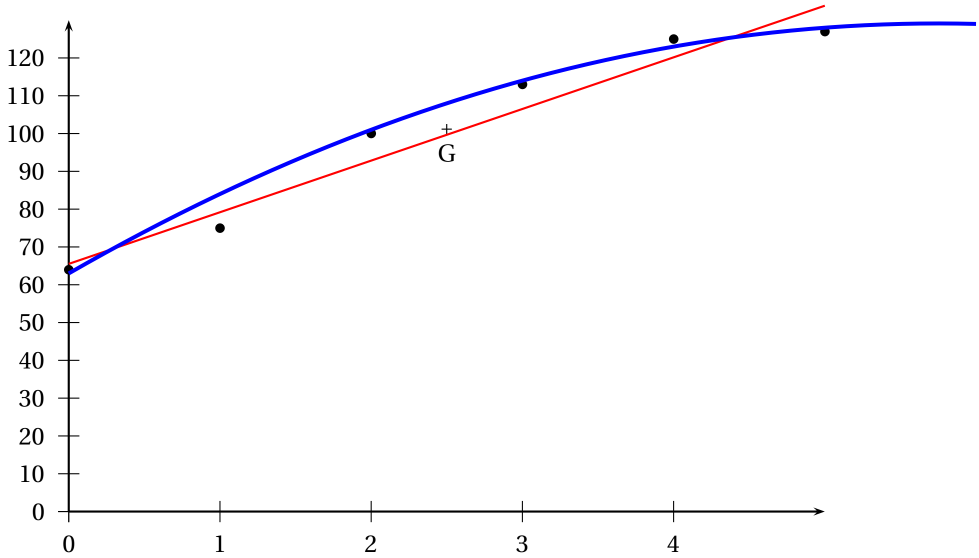
$$y = 28,07z + 17,82$$

4. (a) On admet que cet ajustement reste fiable à moyen terme
   On a : $y = 28,07z + 17,82$ soit : $y = 28,07\ln x + 17,82$
   En 2006 : $x = 9$ donc $y \approx 79,50$
   Le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager est de 79,50%.

(b) On veut $y > 85$ soit $28,07 \ln x + 17,82 > 85$
$lnx > \dfrac{85-17,82}{28,07}$ donc $x > \exp\left(\dfrac{85-17,82}{28,07}\right)$ (car exp est croissante sur $\mathbb{R}$).
On trouve $x > 10,95$ soit $x \geqslant 11$ (car x est un nombre entier)
On peut penser que le taux de pénétration dépassera 85% a partir de l ?année 2008

XIX Nouvelle Calédonie, novembre 2006

1. (a)



(b) Les coordonnées du point moyen sont : $G(2,5\ ;\ 100,7)$

2. (a) Une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés est :

$$\boxed{y = 13,66x + 65,52}.$$

(b) La droite est tracée dans le graphique ci-dessus.

(c) L'année 2005 correspond au rang $x = 6$. Le bénéfice envisageable est : $13,66 \times 6 + 65,52 = 148,48$.
$\boxed{\text{Avec cet ajustement, le bénéfice serait de 148,48 k€}}$.

3. (a) On envisage un autre ajustement, avec la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 23x + 63$.
$f'(x) = -4x + 23$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{23}{4}$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{23}{4}$.
On en déduit le tableau de variations :

x	0		$\frac{23}{4}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1033}{8} = 129,125$	$\searrow$	129

(b) La courbe est représentée en bleu dans le repère précédent.

(c) Avec ce deuxième modèle d'ajustement, on peut faire comme prévision pour 2005 :
$f(6) = -2 \times 6^2 + 23 \times 6 + 63 = 129$.
$\boxed{\text{Le bénéfice serait de 129 k€en 2005}}$.

4. En réalité, le bénéfice est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2004. Ce bénéfice est alors de $127 \times \left(1 + \dfrac{0,9}{100}\right) = 127 \times 1,009 = 128,143$.
C'est donc l'ajustement obtenu avec la fonction f qui donne le meilleur ajustement.