Correction de la feuille d'exercices de révision (2)

I Nouvelle Calédonie mars 2012

PARTIE A :

1. On cherche une primitive F sous la forme $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.
   Par définition d'une primitive, on doit avoir $F' = f$; or $F'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)\mathrm{e}^x$.
   Pour tout x, on doit donc avoir $ax+a+b = x$, d'où, par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases}$.
   On en déduit $a = 1$ et $b = -a = -1$ donc $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Alors : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \boxed{1}$.

2. (a) $\mathscr{A}(\text{OAA}') = \dfrac{1}{2}a \times a\mathrm{e}^a = \boxed{\dfrac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a}$. (aire d'un triangle)

   $\mathscr{A}(\text{ABB}'\text{A}') = \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}\right) \times (1-a) = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right)}$ (aire d'un trapèze).

   (b) Les segments [OA] et [AB] étant au dessus de la courbe $\mathscr{C}$ l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, soit :
   $\dfrac{1}{2}a^2\mathrm{e}^a + \dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x =$
   $\dfrac{1}{2}\left(a^2\mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a - a^2\mathrm{e}^a + \mathrm{e} - a\mathrm{e}\right) - 1 = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^a - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)}$.

PARTIE B :

1. Toutes les fonctions sont dérivables sur $[0~;~+\infty[$, donc :
   $g'(x) = \boxed{\mathrm{e}^x - \mathrm{e} + x\mathrm{e}^x}$.
   Puis $g''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \boxed{\mathrm{e}^x(2+x)}$.
2. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, et sur $[0~;~+\infty[$, $2+x \geqslant 2 > 0$: donc sur $[0~;~+\infty[$, $g''(x) > 0$: on conclut que la fonction g' est **croissante** (strictement) sur $[0~;~+\infty[$.
3. On a $g'(0) = 1-\mathrm{e} < 0$ et $g'(1) = \mathrm{e} > 0$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	
$g(x)$	$\mathrm{e}-1<0$ $\nearrow$	$+\infty$

   Donc la fonction g', monotone croissante et continue sur $[0;~1]$ de $g'(0) < 0$ à $g'(1) > 0$, s'annule une seule fois sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   Il existe donc un réel $\alpha \in [0~;~1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne : $\boxed{0{,}5 < \alpha < 0{,}6}$.
4. Sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$, $g'(x) < 0$: la fonction est donc décroissante sur cet intervalle.
   Sur l'intervalle $[\alpha~;~+\infty]$, $g'(x) > 0$: la fonction est donc croissante sur cet intervalle.

5. D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à : $\frac{1}{2}g(\alpha)$.

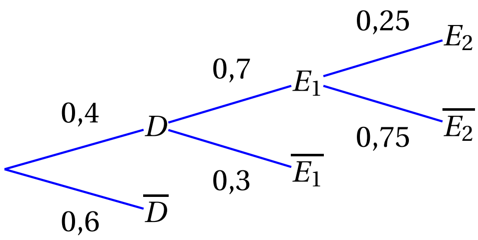
Or on a vu que la fonction g a sur sur $[0\ ;\ +\infty[$ et également sur $[0\ ;\ 1]$ un minimum en $\boxed{x=\alpha}$.

L'aire minimum est donc égale à : $\boxed{\frac{1}{2}g(\alpha)}$

Non demandé : cette aire vaut approximativement 0,088 2 unité d'aire.

II Métropole juin 2012

1. (a)



(b) On a $p(E_1) = p(D\cap E_1) = p(D)\times p_D(E_1) = 0,4\times 0,7 = \boxed{0,28}$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :

$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D\cap\overline{E_1}\right) + p\left(D\cap\overline{E_2}\right) = 0,6+0,4\times 0,3+0,4\times 0,7\times 0,75 = 0,6+0,12+0,21 = 0,93.$

D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1-p(F) = 1-0,93 = \boxed{0,07}$.

On peut aussi calculer directement la probabilité d'être recruté, soit :

$p\left(\overline{F}\right) = p(D\cap E_1\cap E_2) = 0,4\times 0,7\times 0,25 = \boxed{0,07}$.

D'où $p(F) = 1-p\left(\overline{F}\right) = 1-0,07 = \boxed{0,93}$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. On a répétition d'pruves identiques. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n=5,\ p=0,07)$.

(b) On a $p(X=2) = \binom{5}{2}\times 0,07^2\times 0,93^3 = 10\times 0,07^2\times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx \boxed{0,039}$ à 10^{-3} près.

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0}\times 0,07^0\times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1-0,93^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1-0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n\ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.

Or $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx \boxed{95,1}$.

Il faut donc traiter **au moins 96 dossiers** pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

III Pondichéry avril 2012

1. (a) Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire limité par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

(b) Pour tout n, on a $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x}-\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}\times\mathrm{e}^{-x}}{1+x}-\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}=\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)}$.

Or $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant 1+x\leqslant 2$: donc $1+x>0$;

D'autre part on sait que $\mathrm{e}^{-x}>0$. Enfin $0\leqslant x\leqslant 1 \iff -1\leqslant -x\leqslant 0\Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-x}\leqslant\mathrm{e}^{0}$.

Donc $\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-x}-1\leqslant 0$ et finalement par produit

$f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant 0 \iff f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$: la suite $\left(f_n\right)$ est **décroissante**. Par intégration sur l'intervalle $[0\,;1]$ des fonctions positives f_{n+1} et f_n (conservation de l'ordre) :

$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)\Rightarrow I_{n1}\leqslant I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

2. (a) $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant 1+x\leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient : $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$.

D'autre part on sait que pour $1+x\geqslant 1$, on a $(1+x)^2\geqslant 1+x \iff$

$\dfrac{1}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.

Enfin il est évident que $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}>0$, donc finalement :

$$\boxed{0\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant\mathrm{e}^{-nx}.}$$

(b) Par intégration sur l'intervalle $[0\,;1]$ des inégalités précédentes on obtient (conservation de l'ordre) :

$\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\int_0^1\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ soit encore

$0\leqslant J_n\leqslant I_n\leqslant\left[-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :

$\boxed{0\leqslant J_n\leqslant I_n\leqslant-\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-nx}-1\right)}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-nx}=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-nx}-1\right)=0$.

Conclusion : d'après le **théorème des « gendarmes »**, les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

3. (a) On a $(uv)'=u'v+uv'$ donc $uv'=(uv)'-u'v$.

(b) On pose : $u(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{-nx}$ d'où $u'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $v(x)=-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

On en déduit : $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}=\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(uv)'(x)-(u'v)(x)\,\mathrm{d}x$

$=[(uv)(x)]_0^1-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{n}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\right]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-1\right]-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n\neq 0$:

$\boxed{nI_n=1-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-J_n}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=\lim_{n\to+\infty}J_n=0$, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}nI_n=1}$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $I_n\approx\dfrac{1}{n}$.

Exemple : pour $n = 10$, la calculatrice donne $I_{10} \approx 0,091 \approx \dfrac{1}{10}$.

IV Liban mai 2012

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0, \text{ car somme de nombres positifs sur }]0\,;+\infty[$$

La fonction g est donc **croissante** sur $]0\,;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.
Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2. La fonction g est continue (comme somme de fonctions continues)sur $]0\,;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution.
Comme g est strictement croissante, cette solution est unique ; on la note α.
De plus,

$$\begin{cases} g(0,86) \simeq -0,0295 < 0 \\ g(0,87) \simeq +0,0385 > 0 \end{cases} \Longrightarrow g(0,86) < g(\alpha) = 0 < g(0,87) \Longleftrightarrow \boxed{0,86 < \alpha < 0,87}$$

3. Signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$\begin{cases} 0 < x < \alpha \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \Longrightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. — Limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{+\infty}, \text{car } \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

— Limite de la fonction f en $+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty} \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (\textit{croissances comparées})}$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet pour **asymptote oblique** la droite Δ d'équation $y = 2x$.
En effet :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$$

(croissances comparées)

— Le signe de $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ est celui de $-\ln x$, car $x^2 > 0$:

— Position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ :

  — Sur $]0\,;\,1[$, $-\ln x > 0$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ,

  — sur $]1\,;\,+\infty[$, $-\ln x < 0$, $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ,

  — $\mathscr{C}$ et Δ ont un point commun $A(1,2)$.

3. Dérivée $f'(x)$ de f :

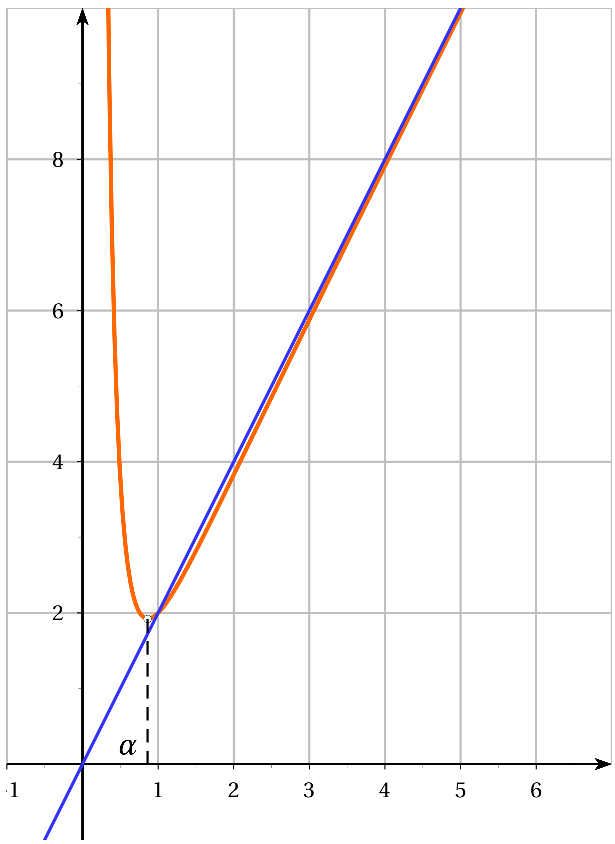
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{x^3}}$$

$f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

5. Figure :



Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par (u.a ; (unité d'aire)=2cm^2) :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

car l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ est :

$$\int_1^n \left(2x - \left(2x - \frac{\ln x}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \times \text{u.a.} = 2\times\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = I_n$$

2. (a) Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties (avec la formule $uv' = (uv)' - u'v$) :

On pose :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \ln x & ; & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} & ; & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{array}$$

Ainsi :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^n = \frac{n-1-\ln n}{n}$$

(b) Ainsi :

$$I_n = 2\frac{n-1-\ln n}{n} = \boxed{2 - \frac{2}{n} - \frac{2\ln n}{n}}$$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 2$, car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n}{n} = \boxed{0}$

V Pondichéry avril 2013

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. $z_M = 2\times\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$.

3. $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M = -\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3} - \mathrm{i}}$.

Module et argument méthode algébrique :

$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \boxed{2}$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

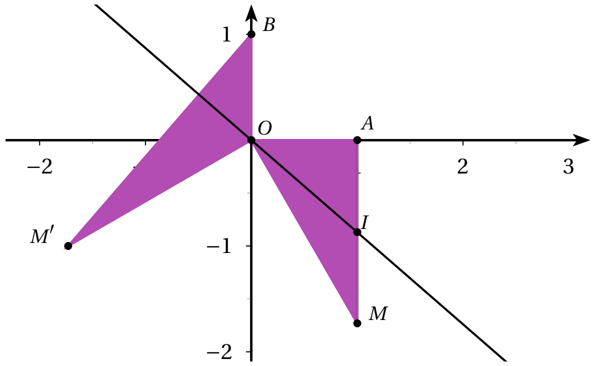
On reconnaît $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

Module et argument par la forme exponentielle :

$|z_{M'}| = |-\mathrm{i}| \times |z_M| = 1\times|2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}| = 2$

$\arg(z_{M'}) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$ (module 2π).

4. La figure n'est pas à l'échelle.
Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



5. Cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

(a) $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \boxed{\dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{y}{2}}$.

(b) $z_{M'} = -\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = \boxed{y - \mathrm{i}\,x}$.

(c) $\boxed{I\left(\dfrac{x+1}{2} ; \dfrac{y}{2}\right)}$, $\boxed{B(0,1)}$ et $\boxed{M'(y;-x)}$.

(d) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\dfrac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ donc les droites $(\mathrm{O}I)$ et $(\mathrm{B}M')$ sont **perpendiculaires**.

(e) $\mathrm{B}M' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part , $2\mathrm{O}I = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$$\boxed{2\mathrm{O}I = \mathrm{B}M'}$$

Autre méthode : On pose $Z = \dfrac{z_{\overrightarrow{BM'}}}{z_{\overrightarrow{OI}}} = \dfrac{y - (x+1)\mathrm{i}}{\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y}{2}\mathrm{i}}$.

On a $Z = 2 \times \dfrac{y - (x+1)\mathrm{i}}{x + 1 + y\mathrm{i}} = -2\mathrm{i} \times \dfrac{x + 1 + y\mathrm{i}}{x + 1 + y\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$.

On en déduit : $\arg(Z) = \arg(-2\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$, or, $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{BM'}\right)$ donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

$|Z| = 2$; or, $|Z| = \dfrac{BM'}{OI}$ donc $BM' = 2OI$.