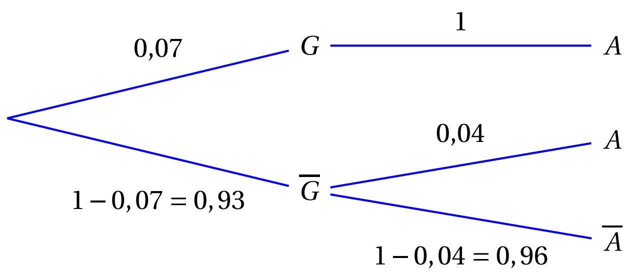
# Correction de la feuille de révisions du 10 juin 2014

## I

### Partie A

1. On complète l'arbre en tenant compte des données fournis dans le texte :




2. D'après la formule des probabilités totales : $p(A) = p(G\cap A)+p(\overline{G}\cap A)$.
   $p(G\cap A) = p(G)\times p_G(A) = 0,07\times 1 = 0,07$
   $p(\overline{G}\cap A) = p(\overline{G})\times p_{\overline{G}}(A) = 0,93\times 0,04 = 0,0372$
   $p(A) = 0,07+0,0372 = 0,1072$
3. La probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent est :
   $p_A(G) = \dfrac{p(G\cap A)}{p(A)} = \dfrac{0,07}{0,1072} \approx 0,653.$

### Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3,5$.

1. $\mu-2\sigma = 14-2\times 3,5 = 7$ et $\mu+2\sigma = 14+2\times 3,5 = 21$
   On sait que si une variable aléatoire $X$ suit la loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$ que : $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma)\approx 0,95$ ; comme la variable aléatoire $X$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 14$ et $\sigma = 3,5$, on peut dire que $p(7\leqslant X\leqslant 21)\approx 0,95$.
2. La probabilité qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année est $p(X\geqslant 10)$. À la calculatrice, on trouve $p(X\geqslant 10)\approx 0,873$.

### Partie C

Pour une proportion $p$ et un échantillon de taille $n$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

L'échantillon de l'enquête est de taille $n = 200$ et la mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail donc $p = 0,22$.

L'intervalle est alors :
$I = \left[0,22-1,96\dfrac{\sqrt{0,22(1-0,22)}}{\sqrt{200}}\,;\,0,22+1,96\dfrac{\sqrt{0,22(1-0,22)}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,16\,;\,0,28]$.

L'enquête a montré que 28 personnes ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence, ce qui fait une proportion de $\dfrac{28}{200} = 0,14$ ; or $0,14 \notin I$ donc on peut penser que le résultat de l'enquête remet en question l'affirmation de la mutuelle.

## II

1. (a) En utilisant calculatrices ou logiciels, on trouve : $P(X\leqslant 5800)\approx 0,3085$ .
   (b) $P(5900\leqslant X\leqslant 6100)\approx 0,1974$ .
   (c) $P(X\geqslant 6250)\approx 0,2660$ .
2. On utilise la fonction « inverse » de la calculatrice qui donne $x$ quand on entre $P(X\leqslant x)$
   (a) Il s'agit de déterminer la valeur $x$ de $X$ telle que $P(X\leqslant x) = 0,30$ . $x\approx 5790$ litres de lait par an.
   (b) Il s'agit de déterminer la valeur $x$ de $X$ telle que $P(X\geqslant x) = 0,20$ soit $P(X\leqslant x) = 0,8$ . $x\approx 6336$ litres de lait par an.

## III

1. On note $X$ la variable « durée de vie ».
   Les spécifications se traduisent par : $P(120\leqslant X\leqslant 200) = 0,8$ et $P(X\leqslant 120) = 0,05$ d'où $P(X\leqslant 200) = 0,85$.
   En posant $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, $Z$ suit $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ , on obtient donc : $P\left(\dfrac{120-\mu}{\sigma}\leqslant Z\leqslant\dfrac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0,8$ et $P\left(Z\leqslant\dfrac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05$.
   Avec la calculatrice, $P\left(Z\leqslant\dfrac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05$ donne $\dfrac{120-\mu}{\sigma} = -1,65$ et $P(Z\leqslant\dfrac{200-\mu}{\sigma}) = 0,85$ donne $\dfrac{200-\mu}{\sigma} = 1,04$.
   Ce qui donne le système suivant : $\begin{cases}\mu = 120+1,65\sigma\\ \mu = 200-1,04\sigma\end{cases}$.
   La résolution du système donne : $\mu\approx 169$ et $\sigma^2\approx 884$.
2. $P(200\leqslant X\leqslant 230) = p(X\leqslant 230)-P(X\leqslant 200)\approx 0,13$

## IV

Soit $P_N$ la proposition « $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, pour tout $n \geqslant 1$.

Effectuons une démonstration par récurrence.

- **Initialisation** Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ et $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1\times 2}{2}\right]^2 = 1^2 = 1$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie au rang $n$.

  Au rang $n = 1$ : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i + 1^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] = (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{2^2} = \boxed{\left[\frac{(n+1)n+2}{2}\right]^2}$.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

  ON a montré l'hérédité, c'est-à-dire $p_n$ vraie $\Rightarrow P_n$ vraie.

La propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

## V Asie juin 2013

1. **Affirmation 1** : VRAIEOn a $\overrightarrow{AB}\left(-\sqrt{3}-2\,;\,-1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-1\,;\,\sqrt{3}-2\right)$.

   D'où $\overrightarrow{AC} = \left(2-\sqrt{3}\right)\overrightarrow{AB}$.

   Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : FAUSSE On calcule successivement : $EB^2 = 8$ ; $EC^2 = 8$ et $ED^2 = \frac{19}{4} + 2\sqrt{3} \neq 8$.

   Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E.
3. **Affirmation 3** : VRAIE Une équation du plan (IJK) est $x+y+z=1$. Un point commun à ce plan et à la droite $\mathcal{D}$ a ses coordonnées telles que :

   $2-t+6-2t-2+t = 1 \iff 5 = 2t \iff t = \frac{5}{2}$.

   Ce point commun existe donc et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
4. **Affirmation 4** : VRAIE (EFGH) est un carré donc le milieu T de [HF] est le milieu de [EG].

   On a donc $\overrightarrow{ET} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

   En prenant par exemple le repère $\left(A,\ \overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ calculons le produit scalaire :

   $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ET}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}\right) = \left(\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}\right) =$

   $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{GC}$.

   Or ABCDEFGH est un cube, donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG} = 0$ et $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{GC} = 0$.

   De plus $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{GC}$ et $EG = c\sqrt{2}$, $c$ étant la mesure du côté du cube.

   Finalement : $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = -c^2 + \frac{1}{2}\left(c\sqrt{2}\right)^2 = -c^2 + c^2 = 0$.

   Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.