Correction du bac blanc février 2018

I

Soit P le polynôme de degré 4 défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \mathrm{i}\sqrt{3}^4 - 6\mathrm{i}\sqrt{3}^3 + 24\mathrm{i}\sqrt{3}^2 - 18\mathrm{i}\sqrt{3} + 63 = 9 + 18\sqrt{3}\mathrm{i} - 72 - 18\sqrt{3}\mathrm{i} + 63 = 0$; $\boxed{P\left(\mathrm{i}\sqrt{3} = 0\right)}$ donc $\mathrm{i}\sqrt{3}$ est une racine de P.
2. (a) Pour tout z, $\overline{P(z)} = \overline{z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63} = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 24\overline{z}^2 - 18\overline{z} + 63 = \overline{z}^4 - 6\overline{z}^3 + 24\overline{z}^2 - 218\overline{z} + 63 = P\left(\overline{z}\right)$ car $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et si z est réel, $\overline{z} = z$.
   Donc $\boxed{\overline{P(z)} = P\left(\overline{z}\right)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Notons $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$. $P(a) = 0$ donc $\overline{P(a)} = 0$ d'où $P\left(\overline{a}\right) = 0$. Ainsi $\boxed{\overline{a} = -\mathrm{i}\sqrt{3}}$ est-il aussi une racine de P.
3. $\left(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(az^2 + bz + c\right) = \left(z^2 + 3\right)\left(az^2 + bz + c\right) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 3az^2 + 3bz + 3c = az^4 + bz^3 + (c + 3a)z^2 + 3bz + 3c$.
   En identifiant les coefficients, on trouve :
   $$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c + 3a = 24 \\ 3b = -18 \\ 3c = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 21 \end{cases}$$
4. L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $\boxed{\left(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z^2 - 6z + 21\right) = 0}$.
   Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   - La nullité du premier facteur redonne les solutions $-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   - On résout $z^2 - 6z + 21 = 0$
     $\Delta = 36 - 84 = -48 < 0$.
     On a deux solutions complexes conjuguées :
     $z_3 = \dfrac{6 - \mathrm{i}\sqrt{48}}{2} = \dfrac{6 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_4 = \overline{z_3} = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

   L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ \mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ 3 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}}$.

II

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |     | alors a prend la valeur 1 − a
                   |     | sinon Si d ⩽ 4
                   |     |         | alors b prend la valeur 1 − b
                   |     |     FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
Voilà le tableau complété après avoir fait fonctionné l'algorithme.

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1er passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2e passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3e passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

(b) Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.
À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc **les deux pièces sont du côté pile.**

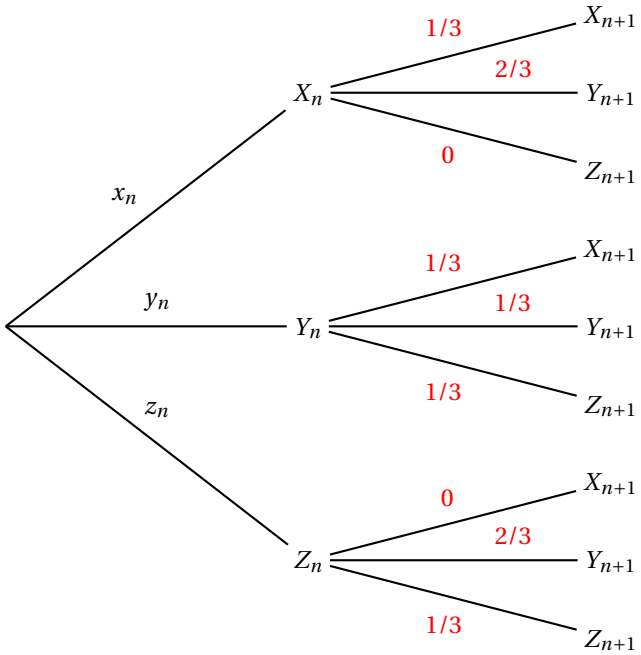
2. Pour tout entier naturel n, on note :
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

(a) Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $\boxed{x_0 = 1\ ;\ y_0 = 0\ ;\ z_0 = 0}$.

(b) X_{n+1} est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » ; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6 ; la probabilité de l'événement $\{5\ ;\ 6\}$ est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $\boxed{P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}}$.

(c) On complète l'arbre proposé : les autres probabilités conditionnelles se calculent de la même façon qu'à la question précédente.



(d) Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) D'après la **formule des probabilités totales** :

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} \text{ donc } \boxed{y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}}$$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}b_n}$$

$$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Donc la suite (b_n) est **géométrique** de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $\boxed{y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

(g) La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$:

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}}$.

Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.

Exercice II de spécialité

Partie A

D'une part :

$$\text{HI} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ B \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\text{LL} \longrightarrow \begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \longrightarrow \begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}$$

Le mot HILL est chiffré par le mot ZBZY

Partie B

1. Puisque a et 26 sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de Bèzout, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + 26v = 1$$

Puisque $26 \equiv 0 \mod 26$, alors $26v \equiv 26 \times 0 \mod 26$, soit $26v \equiv 0 \mod 26$.
En ajoutant au à chacun des deux membres de la congruence précédente, on obtient :

$$au + 26v \equiv au \mod 26$$

soit

$$au \equiv 1 \mod 26$$

P.G.C.D (a,26)=1 $\Longrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \quad a \times u \equiv 1 \mod 26$

2. (a)

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	16	11	6	1

(b) L'algorithme affiche 5, qui est donc le plus petit entier u tel que $a \times u \equiv 1 \mod 26$. Par suite :

$$5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$$

3. (a) $$\begin{aligned} 12A - A^2 &= \begin{pmatrix} 125 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \\ &= 12\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5\times 5+2\times 7 & 5\times 2+2\times 7 \\ 7\times 5+7\times 7 & 7\times 2+7\times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 60 & 24 \\ 84 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \\ &= 21 \times I \end{aligned}$$

(b) L'égalité $12A - A^2 = 21I$ s'écrit $(12I - A) \times A = 21I$. Par suite :

$$B = 12I - A$$

(c) Supposons :

$$A \times X = Y$$

Multiplions chacun des deux membres de l'égalité (à gauche) par B :

$$B \times A \times X = B \times Y$$

Puisque $BA = 21I$, l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$21X = BY$$

On a prouvé :

$$AX = Y \Longrightarrow 21X = BY$$

Partie C

1. Puisque, par hypothèse, Y=AX, on en déduit, d'après la partie précédente :

$$21X = BY$$

où B est la matrice $12I - A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

• On a d'une part $21X = \begin{pmatrix} 21x_1 \\ 21x_2 \end{pmatrix}$

• D'autre part :

$BY = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7y_1 - 2y_2 \\ -7y_1 + 5y_2 \end{pmatrix}$ On en déduit :

$$\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

2. Multiplions chacune des deux égalités ci-dessus par 5 :

$$\begin{cases} 105x_1 = 35y_1 - 10y_2 \\ 105x_2 = -35y_1 + 25y_2 \end{cases}$$

• Prouvons : $x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$:

Puisque $105 \equiv 1 \mod 26$, alors

$$105x_1 \equiv x_1 \mod 26 \ (a)$$

De $\begin{cases} 35 \equiv 9 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_1 \equiv r_1 \mod 26 \end{cases}$, on déduit, par somme : $35y_1 \equiv 9r_1 \mod 26$ (1).

De $\begin{cases} -10 \equiv 16 \mod 26 \\ \text{et} \\ y_2 \equiv r_2 \mod 26 \end{cases}$, on déduit, par somme : $-10y_2 \equiv 16r_2 \mod 26$ (2).

En ajoutant membre à membre les congruences (1) et (2), on obtient

$$35y_1 - 10y_2 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26 \ (b)$$

De (a) et (b) on déduit :

$$x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \mod 26$$

• Un raisonnement analogue montre que

$$x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \mod 26$$

3.

$$VL \to \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 365 \\ 632 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \to BI$$

$$UP \to \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9r_1 + 16r_2 \\ 17r_1 + 25r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 715 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \to EN$$

VLUP code le mot BIEN

Exercice 3 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.

1. • Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} x\sqrt{x^2+1} = -\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

   • Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x^2+1} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables.

   $g = u\sqrt{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = x^2+1 \end{cases}$.

   $g' = u'\sqrt{v} + u\left(\sqrt{v}\right)' = u'c + u \times \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = x \end{cases}$.

   Par conséquent : $g'(x) = \sqrt{x^2+1} + x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2+1 > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $g'(x) > 0$; g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. • g est une fonction polynôme donc **continue**.

   • $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ donc $g(x)$ prend des valeurs négatives.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc $g(x)$ prend des valeurs positives.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution.

  Comme g est croissante, cette solution est unique ; notons-la α.

4. À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,79$ à 10^{-2} près.
5. Tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

6. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.
   (a) L'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ en 0 est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$, c'est-à-dire $\boxed{y = x - 1}$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - (x-1) = x\sqrt{x^2+1} - 1 - (x-1) = x\sqrt{x^2+1} - x = x\left[\sqrt{x^2+1} - 1\right]$.

   Pour tout x, $x^2 + 1 \geqslant 1$ donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$ (car la fonction racine carrée est croissante) donc $\sqrt{x^2+1} - 1 \geqslant 0$.

   $g(x) - (x-1)$ est donc du signe de x, donc négatif pour $x \leqslant 0$ et positif pour $x \geqslant 0$.

   $\mathscr{C}_g$ est donc au dessus de T pour $x \leqslant 0$ et en dessous pour $x \geqslant 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$.

1. - Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{3}\right) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.
   - Limite en $+\infty$: on a clairement une forme indéterminée du type $\infty - \infty$:

     Pour $x \neq 0$, $f(x)\dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x^3}{3} - x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = x^3\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2}\right]$.

     $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x^2}\right] = \dfrac{1}{3}$.

     Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

   $f = w - \sqrt{v}$ avec $\begin{cases} w(x) = \dfrac{x^3}{3} \\ v(x) = x^2 + 1 \end{cases}$.

   $f' = w' - (\sqrt{v})' = w' - \dfrac{v'}{2v}$ avec $\begin{cases} w'(x) = x^2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

   d'où $f'(x) = x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x\left[x\sqrt{x^2+1} - 1\right]}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}}$.
3. Par définition, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\alpha^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{1}{\alpha}$.

   Alors : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3}{3} - \sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha^3}{3} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.

   On en déduit que $f(\alpha) \approx -1,10$
4. $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

   Tableau de signes :

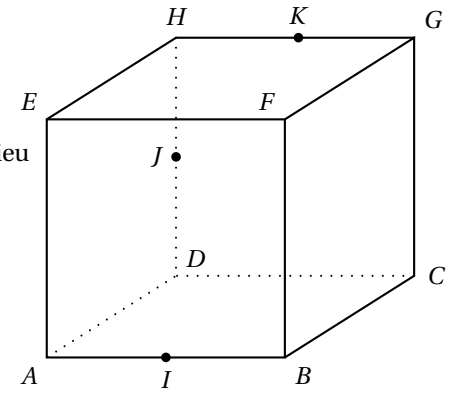
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\approx -1,1$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4 (sur 3 points) - commun à tous les élèves

$ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



On détermine les coordonnées tous les points de la figure dans le repère donné :

$A(0\,;0\,;0)$ $\quad B(1\,;0\,;0)$ $\quad D(0\,;1\,;0)$ $\quad E(0\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Longrightarrow C(1\,;1\,;0)$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow F(1\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow H(0\,;1\,;1)$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Longrightarrow G(1\,;1\,;1)$

I est le milieu de $[AB]$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_I &=& \dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I &=& \dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_I &=& \dfrac{z_A+z_B}{2}\end{array}\right.$ et donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$

On trouve de même : $J\left(0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_E-x_C &=& -1\\ y_E-y_C &=& -1\\ z_E-z_C &=& 1\end{array}\right.$; $\boxed{\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}$;

   celles de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_J-x_I &=& -\dfrac{1}{2}\\ y_J-y_I &=& 1\\ z_J-z_I &=& \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ donc $\boxed{\overrightarrow{IJ}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\1\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}}$

   et celles de $\overrightarrow{IK}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_K-x_I &=& 0\\ y_K-y_I &=& 1\\ z_K-z_I &=& 1\end{array}\right.$ donc $\boxed{\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

   $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ}=(-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)\times 1+1\times\dfrac{1}{2}=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{IJ}}$

   $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK}=0+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\boxed{\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{IK}}$

   Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ du plan (IJK), donc il est **normal** au plan (IJK).

2. Les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_D-x_B &=& -1\\ y_D-y_B &=& 1\\ z_D-z_B &=& 0\end{array}\right.$; $\boxed{\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = (-1)(-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc $\boxed{\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BD}}$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est un vecteur normal au plan (IJK) donc la droite (BD) est **parallèle** au plan (IJK).

On pourrait préciser la réponse en démontrant que la droite (BD) n'est pas contenue dans le plan (IJK) mais ce n'est pas explicitement demandé dans le texte.

Si le point B appartient au plan (IJK), on peut dire que le point A, appartenant à la droite (BI), appartient aussi à ce plan donc les plans (ABD) et (IJK) sont confondus, ce qui est faux.

3. Soit M un point de la droite (CE) donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires.

   On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CE}$ (où $k \in \mathbb{R}$), ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{rcl} x_M - x_C &=& k \times (-1) \\ y_M - y_C &=& k \times (-1) \\ z_M - z_C &=& k \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& 1-k \\ y_M &=& 1-k \\ z_M &=& k \end{array}\right.$

   Le plan (BDM) et le plan (IJK) sont parallèles, s'ils ont les mêmes vecteurs normaux; autrement dit pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ qui est normal au plan (IJK) soit également normal au plan (BDM).

   Comme ce vecteur est déjà orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$, il suffit qu'il soit orthogonal à un deuxième vecteur directeur du plan (BDM) non colinéaire à $\overrightarrow{BD}$, soit $\overrightarrow{BM}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{rcl} x_M - x_B &=& 1-k-1 &=& -k \\ y_M - y_B &=& 1-k-0 &=& 1-k \\ z_M - z_B &=& k-0 &=& k \end{array}\right.$

   $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CE} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE} = 0 \iff (-k) \times (-1) + (1-k) \times (-1) + k \times 1 = 0 \iff k - 1 + k + k = 0$
   $\iff k = \dfrac{1}{3}$

   Donc M a pour coordonnées $\left(1 - \dfrac{1}{3}; 1 - \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right) = \boxed{\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)}$

Exercice 5 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2}}$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{23}{8}}$.

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \boxed{\dfrac{383}{128} \approx 2{,}992\,19}$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \boxed{\approx 2{,}999\,97}$.

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est **croissante** et qu'elle **converge** vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.

- Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

  On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

  $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

  Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est **héréditaire** ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\boxed{-1 \leqslant v_n \leqslant 0}$

3. (a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = \boxed{-v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)}$

   (b) Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

   $$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est **croissante**.
4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est **convergente**.
5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in]-1\,;\,0[$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

   On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

   $x = -\dfrac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

   Mais on sait que $\ell \in]-1\,;\,0[$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

   Donc $\boxed{\ell = 0}$ et la limite de la suite (v_n) est 0.
6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est **croissante**.

   La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est **convergente vers 3**.

   Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc **validées**.