BACCALAURÉAT BLANC

février 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

L'élève doit traiter les cinq exercices, l'exercice 2 étant différent suivant l'enseignement de spécialité suivi.

L'exercice 2 pour les élèves **ne suivant pas la spécialité mathématiques** commence en page 2 et se poursuit en page 3.

L'exercice 2 pour les élèves **suivant la spécialité mathématique** commence en page 4 et se poursuit en page 5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (sur 3 points) - commun à tous les élèves

Soit P le polynôme de degré 4 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une racine du polynôme P.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

   b. En déduire une autre racine de P.
3. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{3})(az^2 + bz + c)$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2 (sur 5 points) - pour les élèves ne suivant pas la spécialité mathématiques

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                   | entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |     | alors a prend la valeur 1 − a
                   |     | sinon Si d ⩽ 4
                   |     |           | alors b prend la valeur 1 − b
                   |     |       FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

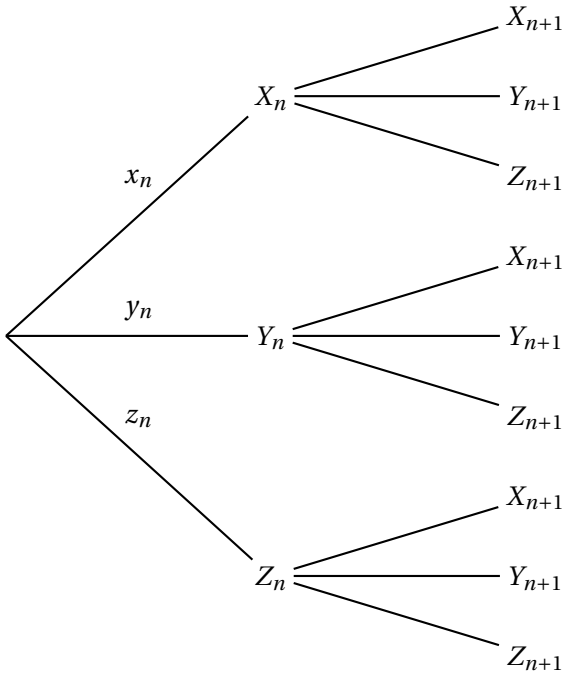
- X_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

c. Compléter les probabilités sur l'arbre ci-dessous, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Interpréter le résultat.

Exercice 2 (sur 5 points) - pour les élèves suivant la spécialité mathématiques

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

<table>
<tr><td>Etape 1</td><td>On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.</td></tr>
<tr><td>Etape 2</td><td>On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :
<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>Q</td><td>R</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td><td>W</td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Etape 3</td><td>On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.</td></tr>
<tr><td>Etape 4</td><td>On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.</td></tr>
<tr><td>Etape 5</td><td>On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2.
Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.</td></tr>
</table>

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. On considère l'algorithme suivant :

<table>
<tr><td>VARIABLES :
TRAITEMENT :

SORTIE</td><td>a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
Lire a
u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
Tant que $r \neq 1$
  u prend la valeur $u+1$
  r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
Fin du Tant que
Afficher u</td></tr>
</table>

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

2. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{lcr} 21x_1 & = & 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 & = & -7y_1 + 5y_2 \end{array} \right.$
2. En utilisant la question B .2., établir que : $\left\{ \begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{array} \right.$
3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sqrt{x^2+1} - 1$.

1. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   b. En déduire les variations de g et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
4. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
6. On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal du plan.

   a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

   b. Etudier la position relative de T et de $\mathscr{C}_g$.

Partie B :

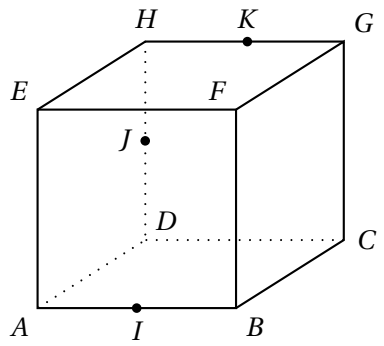
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{x^2+1}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Dresser alors le tableau de variations de f.

Exercice 4 (sur 3 points) - commun à tous les élèves

$ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu de $[AB]$.
J est le milieu de $[HD]$.
K est le milieu de $[HG]$.

On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

Exercice 5 (sur 5 points) - commun à tous les élèves

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, **données en fractions irréductibles**, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 3$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n

$$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$$

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1\ ;\ 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?