

Activités du livre

Activité A page 162 : Notion de limite en l'infini

On considère les sept fonctions suivantes, chacune définie sur son ensemble de définition :

$$f : x \mapsto x^2 \quad g : x \mapsto \frac{x+2}{7-x} \quad h : x \mapsto x + \sin x \quad i : x \mapsto \sqrt{x} \quad j : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad k : x \mapsto \frac{4}{(2-x)^2} \quad m : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
On s'intéresse au comportement de ces fonctions pour de très grandes valeurs de x , c'est-à-dire lorsque x tend vers $+\infty$.
- (a) À l'aide de GeoGebra ou de la calculatrice, tracer une représentation graphique de chaque fonction.
(b) En justifiant le choix effectué, regrouper ces fonctions en deux catégories en s'appuyant sur leur comportement pour de très grandes valeurs de x .
- On considère les fonctions f et i .
 - Comment choisir x pour que le nombre x^2 soit supérieur à 25? Supérieur à 10^2 ? Supérieur à 10^8 ?
 - Mêmes questions pour \sqrt{x} .
 - On dit que les fonctions f et i ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En s'inspirant de l'étude locale précédente, trouver un critère permettant de caractériser cette notion
- On considère à présent les fonctions g et k .
 - Comment choisir x pour que $-1 - g(x)$ soit inférieur à 1? Inférieur à 0,1? Inférieur à 0,01?
 - Comment choisir x pour que $k(x)$ soit inférieur à 1? Inférieur à 0,1? Inférieur à 0,01?
 - Caractériser le fait qu'une fonction a pour limite un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Comment pourrait-on bien visualiser graphiquement cette limite?
 - Que peut-on dire des trois autres fonctions?

Activité B : notion de limite infinie en un réel

On considère la fonction f définie sur un ensemble \mathcal{D}_f par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .
- Graphiquement, comment peut-on visualiser la présence d'une valeur interdite? Décrire notamment le comportement de la courbe représentative de f autour de cette valeur interdite.
- (a) Donner l'image par f des nombres suivants : 2; 1,1; 1,01 et 1,001. Que remarque-t-on?
(b) Donner l'image par f des nombres suivants : 0; 0,9; 0,99 et 0,999. Que remarque-t-on?
- On considère la droite d d'équation $x = 1$. Cette droite coupe-t-elle \mathcal{C}_f ? Justifier.

Bilan : on dit que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à \mathcal{C}_f .

Quel lien existe-t-il entre cette représentation graphique et les limites de f lorsque x tend vers 1?