2nde : vecteurs (deuxième partie)

Table des matières

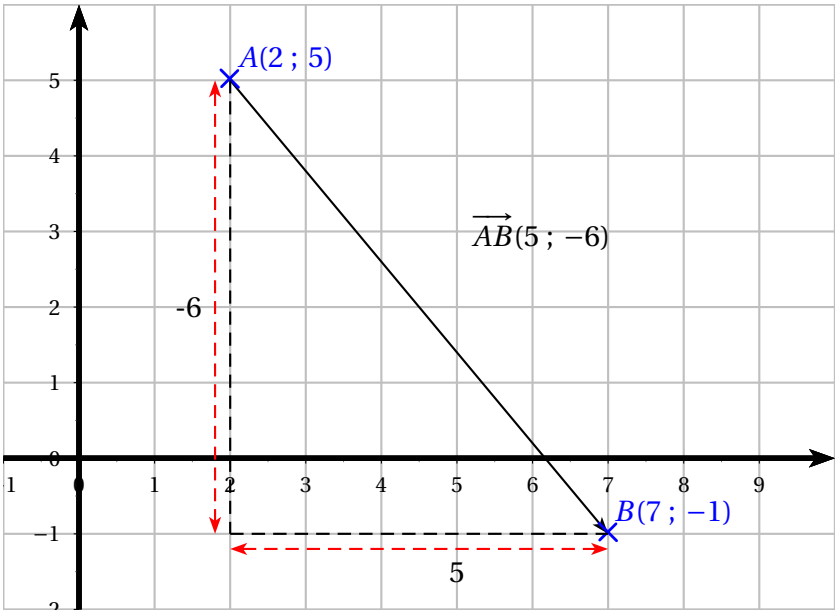
I Coordonnées d'un vecteur 1
II Longueur d'un segment 2
III Multiplication d'une vecteur par un réel 3
IV Vecteurs colinéaires 3
V Caractérisation de la colinéarité par les coordonnées 3
VI Application à la géométrie 4

I Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ un repère quelconque. Soient deux points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ et l'on écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : Les coordonnées d'un vecteur servent à savoir de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.



Remarque : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Application : Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :
Soient A(2; 3) , B(3; 4) et C(5; 6). On cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
On note $D\left(x_D\,;\ y_D\right)$ les coordonnées de D.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-x_D\\6-y_D\end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases}5-x_D=1\\5-x_D=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=4\\y_D=5\end{cases}.$$

D a pour coordonnées $\boxed{D(4\,;\,5)}$

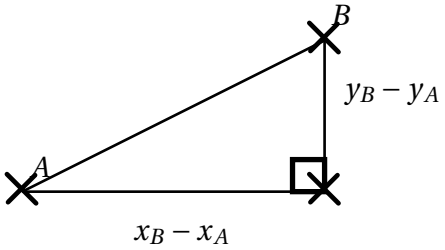
II Longueur d'un segment

Propriété

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère **orthonormal**. Soient A$\left(x_A\,;\ y_A\right)$ et B$\left(x_B\,;\ y_B\right)$. Alors :
$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Démonstration : Cette formule vient de l'application du théorème de Pythagore.

Remarque : (x_1-x_B) et $\left(y_B-y_A\right)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :
$AB^2=(x_N-x_A)^2+\left(y_B-y-A\right)^2$ d'où la formule.
Remarque : elle convient quelles que soient les positions de A et B puisque l'on calcule les carrés des différences des coordonnées.

Exemple : $A(2\,;\,-5)$ et $B(-7\,;\,1)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ donc : $AB=\sqrt{(-9)^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\boxed{\sqrt{117}}$

III Multiplication d'une vecteur par un réel

Définition

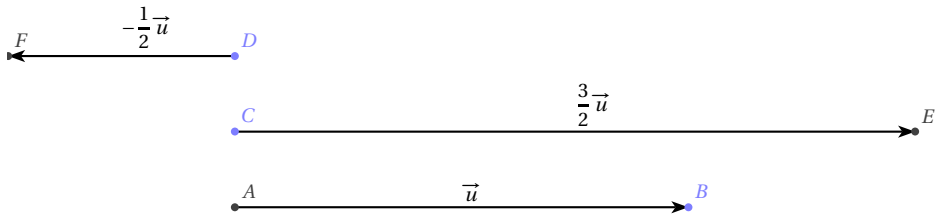
Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur et soit k un réel.

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ est noté $k\overrightarrow{u}$.

Remarque :

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- Si $k>0$, $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Si $k<0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La longueur de $k\overrightarrow{u}$ est k fois celle de $\overrightarrow{u}$ si $k>0$, $-k$ fois celle de $\overrightarrow{u}$ si $k<0$.

Exemple :



IV Vecteurs colinéaires

Rappel

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$

V Caractérisation de la colinéarité par les coordonnées

Rappel : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, cela se traduit par $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$, donc les coordonnées sont bien proportionnelles.

Propriété (condition de colinéarité)

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Exemples :

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.
   Il est clair que $\vec{v} = 3\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
   On applique la condition de colinéarité :
   $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 1\times 1 = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 - 1 = 2-2-1 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

VI Application à la géométrie

Théorème

Soient trois points A, B et C deux à deux distincts.
A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : soient A(2 ; 5), B(3 ; 8) et C(-5 ; -16).
Montrer que ces trois points sont alignés.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\-21\end{pmatrix}$.
Il est clair que $\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{AB}$ donc ces vecteurs sont colinéaires.
Les trois points A, B et C sont bien alignés.

Théorème

Soient quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple : soient A(1 ; 3), B(5 ; -2), C(-1 ; 6) et D7 ; -4).
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-10\end{pmatrix}$.
On remarque directement que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

On peut aussi appliquer la condition de colinéarité : $4\times(-10) - (-5)\times 8 = -40 - (-40) = 0$
Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.