Inéquations

Table des matières

I Comparaison de deux nombres . . . 1
II Règle de l'addition et soustraction . . . 1
III Règles de la multiplication et division . . . 2
IV Les inéquations du premier degré à une inconnue . . . 2
V Méthode de résolution . . . 2
VI Signe de $ax+b$ . . . 3
VII Signe d'un produit de binômes . . . 3
VIII Signe d'une expression rationnelle factorisée . . . 4

I Comparaison de deux nombres

Propriété

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Pour comparer deux nombres (c'est-à-dire savoir lequel est le plus grand), on étudie le signe de la différence.

Quelques règles sur les inégalités

II Règle de l'addition et soustraction

Règle 1

Soient a, b et c trois réels alors :

- $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow a - c \leqslant b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leqslant 0 \iff 2x + 4 - 4 \leqslant 0 - 4 \iff 2x \leqslant -4$
- $3x - 2 < -3 \iff 3x - 2 + 2 < -3 + 2 \iff 3x < -1$

III Règles de la multiplication et division

Règle 2

Soient a, b deux réels et c un réel **positif** alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c$
- $a \leqslant b$ et $c \neq 0 \iff \dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Démonstration : puisque $a \leqslant b$: $b - a \geqslant 0$.
Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence :
Alors $bc - ac = c(b-a) \geqslant 0$ car $b - a \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, donc $\boxed{ac \leqslant bc}$.

De même : $\dfrac{b}{c} - \dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{c} \geqslant 0$. Puisque $b - a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ donc $\boxed{\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}}$.

Exemples :

- $2x > 7 \Leftrightarrow 2x \times \mathbf{3} > 7 \times \mathbf{3} \Leftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{4} \leqslant \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \boxed{x \leqslant \dfrac{4}{3}}$
- $x\sqrt{2} \geqslant 3 \Leftrightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Règle n° 3

Soient a, b deux réels et c un réel négatif ou nul alors :

- $a \leqslant b \iff a \times c \geqslant b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)
- et $a \leqslant b$ et $c < 0 \iff \dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Même démonstration que dans le cas $c \geqslant 0$.

Exemples :

- $-x > 4 \iff -x \times (\mathbf{-1}) < 4 \times (\mathbf{-1}) \iff x < -4$
- $-4x < -3 \iff \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{-3}{-4} \iff x > \dfrac{3}{4}$
- $-2x \geqslant 6 \iff \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{6}{-2} \iff x \leqslant -3$

IV Les inéquations du premier degré à une inconnue

V Méthode de résolution

- $x + a \leqslant b \Leftrightarrow x + a - a \leqslant b - a \Leftrightarrow x \leqslant b - a$
- $x - a \leqslant b \Leftrightarrow x - a + a \leqslant b + a \Leftrightarrow x \leqslant b + a$
- Si $a > 0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \leqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a < 0$: $ax \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} \geqslant \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{b}{a}$
- Si $a > 0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \leqslant b \times a \Leftrightarrow x \leqslant ab$
- Si $a < 0$: $\dfrac{x}{a} \leqslant b \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} \times a \geqslant b \times a \Leftrightarrow x \geqslant ab$

VI Signe de $ax+b$

On considère la fonction affine $f = x \mapsto ax+b$.
Si $a>0$, la fonction est croissante et si $a<0$, a fonction est décroissante.
$ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.
On en déduit le signe de $ax+b$:

Cas a > 0 :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Cas a < 0 :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

VII Signe d'un produit de binômes

On appelle binôme une expression du type $ax+b$ (ou polynôme du premier degré).

Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :
Pour étudier le signe d'une produit de binômes :

- on étudie le signe de chacun d'entre eux,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par binôme)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = -x(2x-3)(x+6)(4-2x)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des quatre binômes de $A(x)$:
- $-x=0 \Leftrightarrow x=0$
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ et $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$
- $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$ et $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$
- $4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$ et $4-2x>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \Leftrightarrow x<2$ (en divisant par -2 qui est négatif, d'où le changement de sens de l'inégalité)
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$\dfrac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** :

  $A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-6[\cup\left]0\,;\,\frac{3}{2}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$

  $A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-6\,;\,0[\cup\left]\frac{3}{2}\,;\,2\right[$

VIII Signe d'une expression rationnelle factorisée

Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\cdots(a_nx+b_n)}{(a'_1x+b'_1)(a'_2x+b'_2)(a'_3x+b'_3)\cdots(a'_nx+b'_n)}$$

avec a_1, $a_2 \ldots a_n$ et a'_1, $a'_2 \ldots a'_n$ non nuls.

⚠**Attention** : dans ce genre d'expressions, il y a des **valeurs interdites**.
Il faut donc commencer par chercher ces valeurs interdites !
On fait alors un tableau de signes comme pour un produit.
Exemple :
Étudions le signe de $B(x) = \dfrac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$: $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $3x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $3x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

  $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

  $1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

  1 et 3 sont donc des valeurs interdites.

- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$		$+$	|	$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$		$-$	|	$-$		$-$	|	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	|	$-$		$-$	|	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	|	$-$	

- **Conclusion :**

  $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0\,;\,1[\cup]2\,;\,3[$

  $B(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,2[\cup]3\,;\,+\infty[$

  $B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\,;\,2\}$