TD 4 sur la multiplication d'un vecteur par un réel

I

Soit $[AB]$ un segment. On veut construire le point D tel que $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$.
Montrer que cette égalité se transforme en $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
Construire alors le point D.

II

Dans chaque cas, montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

a) $4\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$

b) $\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$

c) $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=7\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AC}$

III

$ABCD$ est un rectangle ; I est le milieu de $[AB]$.

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{IE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.
2. F est le symétrique de E par rapport à I.
   Exprimer $\overrightarrow{FI}$ en fonction de $\overrightarrow{IE}$ puis en fonction de $\overrightarrow{IC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. En déduire $\overrightarrow{FB}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5. Montrer alors que $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
6. Que peut-on en déduire pour les points F, D et B.

IV Centre de gravité d'un triangle

1. $[AB]$ est un segment et I est son milieu.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$?
   (b) Démontrer que, pour tout point M,
   $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$.
2. ABC est un triangle quelconque. A', B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
   G est le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
   (a) En appliquant la question 1. (b), montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GC'}$.
   (b) En déduire que G appartient la droite (CC').
   (c) Démontrer de faon analogue que G appartient aux droites (AA') et (BB').
   (d) Que représentent les trois droites (AA'), (BB') et (CC') pour le triangle ABC ?
   (e) Faire une figure et placer G.
   Remarque : on dit que G est le centre de gravité du triangle ABC.

TD 4 sur la multiplication d'un vecteur par un réel

I

Soit $[AB]$ un segment. On veut construire le point D tel que $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$.
Montrer que cette égalité se transforme en $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.
Construire alors le point D.

II

Dans chaque cas, montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

a) $4\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$

b) $\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{0}$

c) $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}=7\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AC}$

III

$ABCD$ est un rectangle ; I est le milieu de $[AB]$.

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{IE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.
2. F est le symétrique de E par rapport à I.
   Exprimer $\overrightarrow{FI}$ en fonction de $\overrightarrow{IE}$ puis en fonction de $\overrightarrow{IC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. En déduire $\overrightarrow{FB}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5. Montrer alors que $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
6. Que peut-on en déduire pour les points F, D et B.

IV Centre de gravité d'un triangle

1. $[AB]$ est un segment et I est son milieu.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$?
   (b) Démontrer que, pour tout point M,
   $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$.
2. ABC est un triangle quelconque. A', B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
   G est le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
   (a) En appliquant la question 1. (b), montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GC'}$.
   (b) En déduire que G appartient la droite (CC').
   (c) Démontrer de faon analogue que G appartient aux droites (AA') et (BB').
   (d) Que représentent les trois droites (AA'), (BB') et (CC') pour le triangle ABC ?
   (e) Faire une figure et placer G.
   Remarque : on dit que G est le centre de gravité du triangle ABC.