Factorisation d'une expression algébrique

Définition

Factoriser une expression algébrique consiste à la transformer pour qu'elle soit sous la forme d'un produit de facteurs le plus simples possibles.

±bigskip d**Remarque :** Toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.
Exemple : x^4+1 ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

I Factorisations faisant appel à un facteur commun

I.1 Règles utilisées pour factoriser une expression avec un facteur commun

On utilise les deux règles suivantes :

- $ab+ac=a(b+c)$
- $ab-ac=a(b-c)$

I.2 Exemples avec un facteur commun

1) $2xy+3xz=x(2y+3z)$
2) $x^2-3x=x\times x-3x=x(x-3)$
3) **Factoriser** $(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9)$.
On essaye de voir comment est constituée l'expression pour voir quelle règle l'on va utiliser.

$\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(5x+7)}_{b}+\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(-2x+9)}_{c}$
$=ab+ac$ en posant : $\begin{cases} a=2x+3 \\ b=5x+7 \\ c=-2x+9 \end{cases}$
$=a(b+c)$
$=(2x+3)\left[(5x+7)+(-2x+9)\right]$
$=(2x+3)(5x+7-2x+9)$
$=(2x+3)(3x+16)$
donc : $\boxed{(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9)=(2x+3)(3x+16)}$

4) **Factoriser** $(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5)$.
$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(7x-4)}_{b}-\underbrace{(5x-3)}_{c}\underbrace{(3x+5)}_{a}$
$=ab-ca$ en posant : $\begin{cases} a=3x+5 \\ b=7x-4 \\ c=5x-3 \end{cases}$

Remarque : $ab - ca = ab - ac = a(b-c)$. En remplaçant a, b et c par leurs expressions, on trouve :
$(3x+5)\,[(7x-4)-(5x-3)]$
$= (3x+5)(7x-4-5x+3)$(attention au signe - devant la parenthèse)
$= (3x+5)(2x-1)$
donc : $\boxed{(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5) = (3x+5)(2x-1)}$

5) **Factoriser** $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x)$.
On remarque que : $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = \underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(7x+1)}_{a} - \underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(3-2x)}_{b}$
$= aa - ab$ avec $\begin{cases} a = 7x+1 \\ b = 3-2x \end{cases}$
$= a(a-b)$
$= (7x+1)\,[(7x+1)-(2-3x)]$
$= (7x+1)(7x+1-2+3x)$
$= (7x+1)(10x-1)$
Par conséquent : $\boxed{(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = (7x+1)(10x-1)}$.

6) **Factoriser** $(x+3)^2-(x+3)$.
Il est clair que $(x+3)$est un facteur commun.
$(x+3)^2-(x+3)$
$= \underbrace{(x+3)}_{a} \times \underbrace{(x+3)}_{a} - \underbrace{(x+3)}_{a} \times 1$
$= a \times a - a \times 1$ avec $a = (x+3)$
$= a(a-1)$
$= (x+3)[(x+3)-1]$
$= (x+3)(x+2)$.
D'où : $\boxed{(x+3)^2-(x+3) = (x+3)(x+2)}$.

I.3 Avec un facteur commun moins apparent

7) **Factoriser** : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13)$.
Il n'y pas de facteur commun apparent, mais il est clair que $6x+10 = 2(3x+5)$.
Par conséquent : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13) = (3x+5)(2x+7)-2(3x+5)(x+13)$.
$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b} - 2\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(x+13)}_{c}$
$= ab - 2ac$ avec $\begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 2x+7 \\ c = x+13 \end{cases}$
$= a(b-2c)$
$= (3x+5)\,[(2x+7)-2(x+13)]$
$= (3x+5)(2x+7-2x-26)$
$= (3x+5)(-19)$
$= -19(3x+5)$.

Par conséquent : $\boxed{(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13) = -19(3x+5)}$

8) **Factoriser** $(15x-3)(2x+7)-10x+2$.
On remarque que : $15x-3 = 5(3x-1)$ et $-10x+2 = -(10x-2) = -2(5x-1)$.

Par conséquent :

$(15x-3)(2x+7)-10x+2 = 3\underbrace{(5x-1)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b}-2\underbrace{(5x-1)}_{a} = 3ab-2a$ avec $\begin{cases} a = 5x-1 \\ b = 2x+7 \end{cases}$

$= a(3b-2)$
$= (5x-1)(3(2x+7)-2)$
$= (5x-1)(6x+21-2)$
$= (5x-1)(6x+19)$.
D'où : $\boxed{(15x-3)(2x+7)-10x+2 = (5x-1)(6x+19)}$

II Factorisations sous forme d'identités remarquables

On utilise l'une des trois identités remarquables vues au collège :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2-b^2$

9) **Factoriser** : $9x^2+42x+49$.
Il n'y aucun facteur commun donc on recherche si on peut faire apparaître une identité remarquable.

$9x^2+42x+49 = (3x)^2+2\times(3x)\times 7+7^2 = a^2+2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a = 3x \\ b = 7 \end{cases}$

$= (a+b)^2$
$= (3a+7)^2$.
Par conséquent : $\boxed{9x^2+42x+49 = (3x+7)^2}$

10) **Factoriser** : $100x^2-121$.
$100x^2-121 = (10x)^2-11^2 = a^2-b^2$ avec $a = 10x$ et $b = 11$
$= (a+b)(a-b)$
$= (10x+11)(10x-11)$.
D'où : $\boxed{100x^2-121 = (10x+11)(10x-11)}$

11) **Factoriser** $(2x+9)^2-(3x-13)^2$.
On voit que l'expression est la différence de deux carrés, ce qui fait penser à une identité remarquable.

$(2x+9)^2-(3x-13)^2$
$= a^2-b^2$ avec $a = (2x+9)$ et $b = (3x-13)$
$= (a+b)(a-b)$
$= [(2x+9)+(3x-13)]\,[(2x+9)-(3x-13)]$
$= (2x+9+3x-13)(2x+9-3x+13)$
$= (5x-4)(-x+22)$

Par conséquent : $\boxed{(2x+9)^2-(3x-13)^2 = (5x-4)(-x+22)}$

III Avec facteur commun et identités remarquables

12) **Factoriser** $A = (4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1$
On remarque que : $4x-4 = 4(x-1)$ et $x^2-1 = x^2-x^2 = (x+1)(x-1)$ (identité remarquable).
Par conséquent :
$A = 4\underbrace{(x-1)}_{a}-\underbrace{(5x-13)}_{b}\underbrace{(x-1)}_{a}+\underbrace{(x+1)}_{c}\underbrace{(x-1)}_{a}$

$= 4a - ba + ca$ avec $a = (x-1)$; $b = (5x-13)$ et $= (x+1)$
$= a(4-b+c)$
$= (x-1)[4-(5x-13)+(x+1)]$
$= (x-1)(4-5x+13+x-1)$
$= (x-1)(-4x+16)$
$= (x-1)\times 4(-x+4)$
$= 4(x-1)(-x+4)$

D'où : $\boxed{A = (4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1 = 4(x-1)(-x+4)}$.

13) **Factoriser** $B = x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
On remarque que : $x^2-4x+4 = x^2-2\times x\times 2+2^2 = (x-2)^2$ (identité remarquable) et que $(2-x) = (-1)\times(x-2) = -(x-2)$.

Par conséquent : $B = x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
$= (x-2)^2+(1-5x)\times(-1)\times(2-x)+(x-2)$
$= \underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(x-2)}_{a}-\underbrace{(1-5x)}_{b}\underbrace{(x-2)}_{a}+\underbrace{(x-2)}_{a}$ avec $a = (x-2)$, $b = (1-5x)$
$= aa - ba + a$
$= a(a-b+1)$
$= (x-2)[(x-2)-(1-5x)+1]$
$= (x-2)(x-2-1+5x+1)\pm\pm = (x-2)(6x-2)$
$= (x-2)\times 2(3x-1)$
$= 2(x-2)(3x-1)$.

Par conséquent : $\boxed{B = x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2) = 2(x-2)(3x-1)}$

IV Quand on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable, on peut essayer de développer...

Remarque : une expression peut ne pas être factorisable ! Exemple : x^2+9

14) **Factoriser** $3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$.
On ne voit ni facteur commun , ni identité remarquable.
En développant, on trouve ;
$A = 3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$
$= 3x^2-5x+18+(15x^2-27x+10x-18)$
$3x^2-5x+18+15x^2-27x+10x-18$
$= 18x^2-22x$
$= 9\times 2x\times x-11\times 2x$
$= 2x(9x-11)$.

D'où : $\boxed{3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9) = 2x(9x-11)}$

Remarque :
Vous verrez en Première une technique pour factoriser, lorsque cela est possible, toute expression du second degré, c'est-à-dire une expression du type ax^2+bx+c, a, b et c réels, $a \neq 0$.