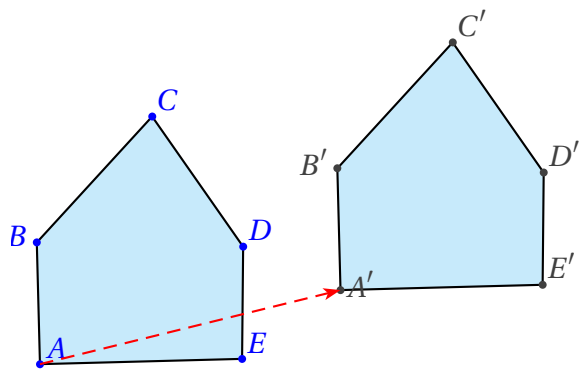
Vecteurs et translations

Table des matières

I Translations 1
II Vecteur d'une translation 1
III Egalité de vecteurs 2
IV Somme de deux vecteurs 3
V Coordonnées d'un vecteur 5
VI Longueur d'un segment 6

I Translations

On considère un pentagone dont les cinq sommets sont A, B, C, D, E.
On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation.
Le sommet A vient en A', B vient en B' et C vient en C', etc.



On dit qu'on a effectué une **translation** du pentagone.
Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en gardant la même orientation.

II Vecteur d'une translation

Remarque : Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. Il faut préciser davantage. Il faut dire vers où on a effectué la translation et de quelle longueur la figure s'est déplacée.

Définition

Puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de donner le déplacement d'un seul point de la figure. Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le polygone A'B'C'D'E'.

On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Remarque : on aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'.
La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$ etc.

Représentation : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.

Vocabulaire

Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles.
Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction ; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires.
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et la **longueur** AB.

Définition

L'image d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :

- les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles) ;
- les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens** ;
- les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur ; AA' = MM'

III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante ;

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

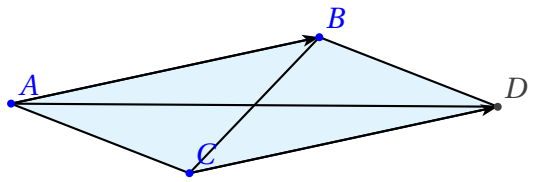
On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'}$.

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC et un parallélogramme (éventuellement aplati).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.



Remarque : si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\vec{u}$.

Propriétés

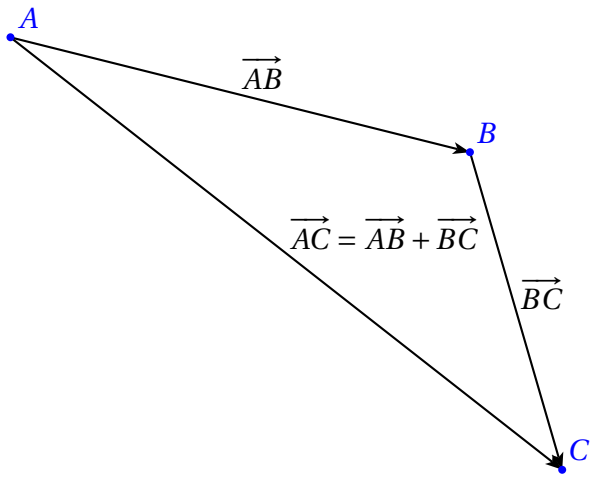
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si B = C.
- K est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Exercice :

Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et DC ? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$?
3. Conclure.

IV Somme de deux vecteurs



Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

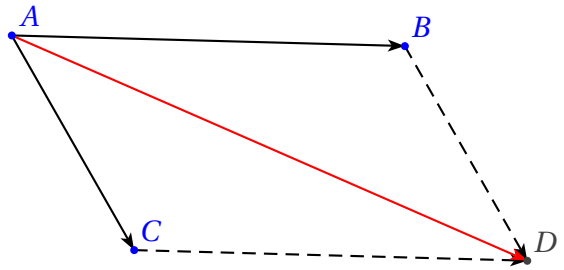
On applique **successivement** les deux translations.
Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Ainsi définit-on une définition sur les vecteurs.

Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Remarque : Le segment d'extrémités A et C est la diagonale du parallélogramme dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux cÙtés consécutifs.

Somme de deux vecteurs de même origine :
On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

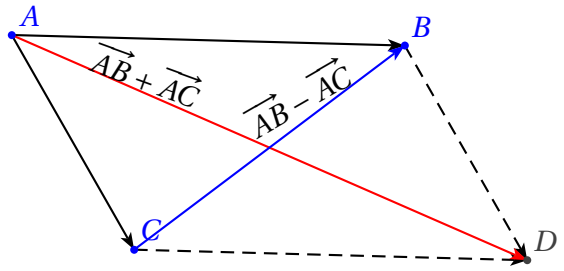


On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD.
Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

Remarque : En appliquant la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.
Une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, qui laisse tous les points immobiles ; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$.
Par conséquent : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \overrightarrow{0}$.

Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}}$.

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme.
On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.

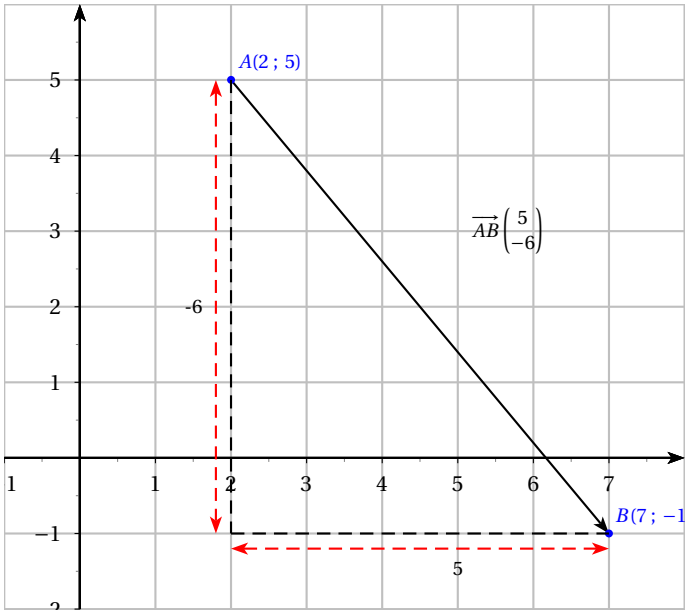


V Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère quelconque.
Soient deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ et l'on écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque :
Les coordonnées d'un vecteur servent à indiquer de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.



Remarque : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Application : Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :
Soient A(2 ; 3) , B(3 ; 4) et C(5 ; 6). On cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
On note $D\left(x_D\ ;\ y_D\right)$ les coordonnées de D.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 6 - y_D \end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :
$\begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 6 - y_D = 1 \end{cases}$.
$x_D = 4$ et $y_D = 5$. donc $D(4\ ;\ 5)$.

VI Longueur d'un segment

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ un repère **orthonormal**. Soient $\mathrm{A}\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_B\,;\,y_B\right)$. Alors :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

Démonstration : elle est basée sur l'application du théorème de Pythagore.

Remarque : $(x_1 - x_B)$ et $\left(y_B - y_A\right)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : $A(2\,;\,-5)$ et $B(-7\,;\,1)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$.
$AB = \sqrt{(-9)^2 + 6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$