# Géométrie repérée

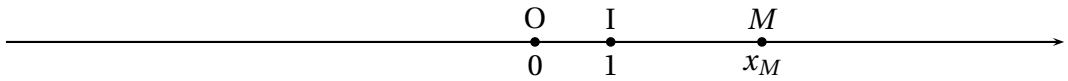
## Table des matières


I Sur une droite . . . . . 1
II Repérage dans le plan . . . . . 1
III Coordonnées du milieu d'un segment . . . . . 2
IV Distance entre deux points . . . . . 3


## I Sur une droite

### Définition

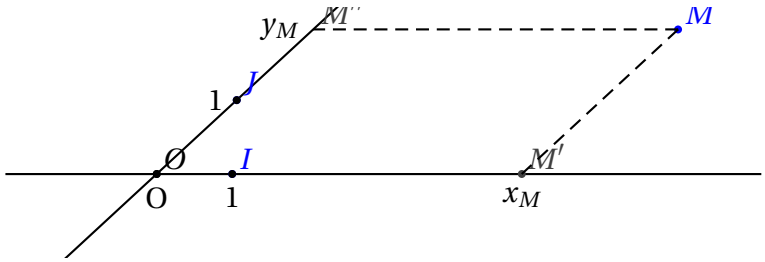
Soit une droite $(d)$. On la munit d'un repère $(O\,;\,I)$.
Alors, tout point $M$ est repéré par un réel $x$ appelé abscisse de $M$.
¿ chaque point correspond une abscisse et ‡ chaque nombre correspond un point.
L'ensemble des abscisses des points de la droite sont les nombres **réels**.




## II Repérage dans le plan

### Définition

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites (**axes**) sécants en $O$, origine du repère. Sur un axe, on place un point $I$ qui permet de définir un repère sur cet axe.
De même, sur l'autre axe, on choisit un point $J$ qui définit un repère sur cet axe.
$(O\,;\,I\,;\,J)$ définit alors un repère du plan.
Soit $M$ un point quelconque. On trace les parallèles aux axes passant par $M$ ; elles coupent ces deux axes en $M'$ et $M''$.
$M'$ est repéré par un nombre $x_M$ et $M''$ par un nombre $y_M$.
On dit que $x_M$ et $y_M$ sont les coordonnées de $M$ dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$. $x_M$ est l'abscisse de $M$ et $y_M$ l'ordonnée de $M$.
On écrit : $M\left(x_M\,;\,y_M\right)$ ou $M(x\,;\,y)$




**Définition**

Prendre des axes quelconques n'est pas toujours pratique. Qaud on peut, on les prend perpendiculaires.
Si les droites $(OI)$ et $(OJ)$ sont perpendiculaires, on dit que le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ est **orthogonal**.
Si le repère est orthogonal et que, de plus, les longueurs $OI$ et $OJ$ sont égales, on dit que le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

**Propriétés**

Deux points sont confondus si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Exercices n° 1 et 2 page 221

Exercices n° 15 ; 16 ; 17 ; 19 ; 20 ; 21 page 230

## III Coordonnées du milieu d'un segment

**Définition**

Soient deux points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ deux points. Le milieu $M$ du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

**Exemples d'application :**

Exemple 1 Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère les points A(-3 ; -1), B(5 ; -2), C(7 ; 3) et D(-1 ; 4).
Montrer que ABCD est un parallélogramme.

**Solution :**
Notons $K$ et $L$ les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$
$x_L = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_L = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$
$K$ et $L$ sont les mêmes coordonnées donc $K = L$.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

Exemple 2 On considère les points A(2 ; 5), B(-1 ; 7) et C(11 ; 13).
On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

**Solution**

On note $x_D$ et $y_D$ les coordonnées de D.

ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

Soit M le milieu de [AC] ; on a :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A = x_C}{2} = \dfrac{13}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 9 \end{cases}.$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont : $\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1 + x_D}{2} \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{7 + y_D}{2} \end{cases}$

Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :

Donc $\dfrac{-1 + x_D}{2} = \dfrac{13}{2}$ d'où $-1 + x_D = 13$, donc $x_D = 14$.

$\dfrac{7 + y_D}{2} = 9$ donc $7 + y_D = 18$ d'où $y_D = 11$.

D a pour coordonnées $\boxed{D(14\ ;\ 11)}$.

## IV Distance entre deux points

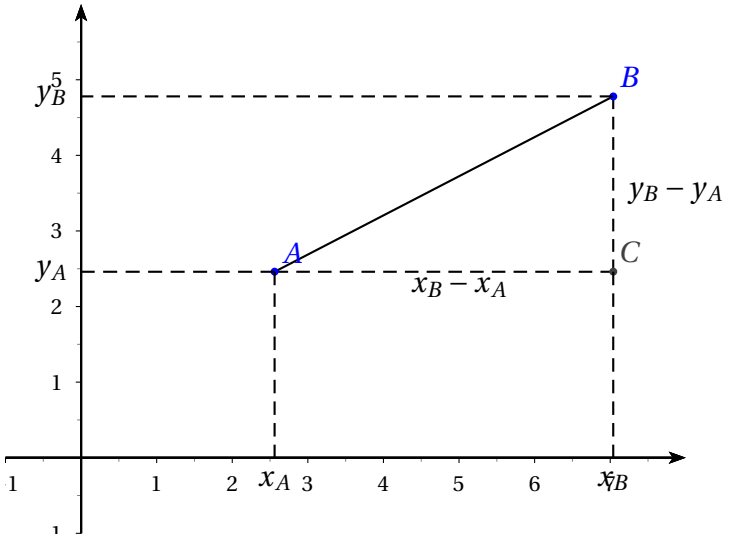
**Propriété**

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).

On considère les points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$.

Alors, la distance AB vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

**Démonstration :** elle est basée sur le théorème de Pythagore.




Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$.

Par conséquent : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B.

**Exercice :**
Montrer que le point $A(1\ ;\ \sqrt{2})$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{3}$.

$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + \left(y_A - y_O\right)^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.
La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

**Exercice :**
Soient $A(1\ ;\ -2)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
Montrer que B appartient au cercle de centre $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

**Exercice :**
Soient $A(-2\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(-3\ ;\ 6)$.
Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$
- $AB = BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$ ; $AB^2 + BC^2 = 5^2 + (^2 = 25 + 25 = 50$.
  $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.
  Il est donc $\boxed{\text{isocèle rectangle en B}}$.