Fonctions : généralités

Table des matières

I Notion de fonction 1
II Courbe représentative 3
III Variations d'une fonction 4
III.1 Sens de variation 4
III.2 Extremum : 4
III.3 Tableau de variation d'une fonction 5

I Notion de fonction

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
Une fonction numérique f, définie sur $\mathscr{D}$, est un procédé qui, à chaque nombre de x de $\mathscr{D}$ associe un **unique** nombre, noté $f(x)$.
Le réel x est appelé la **variable**.
$f(x)$ est **l'image** de x par f.
x est un antécédent de $f(x)$.
On écrit : $f : \begin{array}{l} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

Exemples :

1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures. $T : x \mapsto y = T(x)$ où $T(x)$ est la pression à l'instant x.
2. On enregistre la hauteur d'eau dans un port en fonction de l'heure (elle varie en fonction de la marée).
3. $v(x)$ est la vitesse d'une voiture à x km de son point de départ sur un circuit automobile .
4. $f(x)$ est la carré du nombre x : Sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto x^2$.
5. $\mathscr{D} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,=\infty[$: $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

   Remarque : $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,=\infty[$ se note aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$
6. $\mathscr{D} = [0\,;\,+\infty[$: $f : x \mapsto \sqrt{x}$
7. $\mathscr{D} =]0,1[$. $p\ :\ x \mapsto y = p(x)$ où y est la première décimale de x.
   On a alors $p\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$, $p(0,123) = 1$

Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f.
- Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par f ; exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(-2) = f(2) = 4$ donc 4 a deux antécédents par f

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.
   Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
   - $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
   - $f(3) = 38$
   - $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
   - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$
2. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = x^2$.
   Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?
   -1 a-t-il des antécédents ?

   Réponses :
   x est un antécédent de -4 si $g(x) = -4$, donc $x^2 = -4$.
   Or, $x^2 \geqslant 0$ donc x^2 ne peut pas Ître égal à -4 qui est négatif.
   -4 n'a pas d'antécédent.

   Les antécédents de 2 sont les nombres x tels que $x^2 = 2$, donc $x^2 = 2$.
   2 a donc pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
   (**rappel** : pour $a \geqslant 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$; en effet, $x^2 = a$ s'écrit $x^2 - a = 0$, d'où $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ soit $\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$ après factorisation ; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'une produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

   x est un antécédent de -1 si et seulement si $g(x) = -1$, donc si et seulement si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car $x^2 \geqslant 0$.
   -1 n'a pas d'antécédent par g.

II Courbe représentative

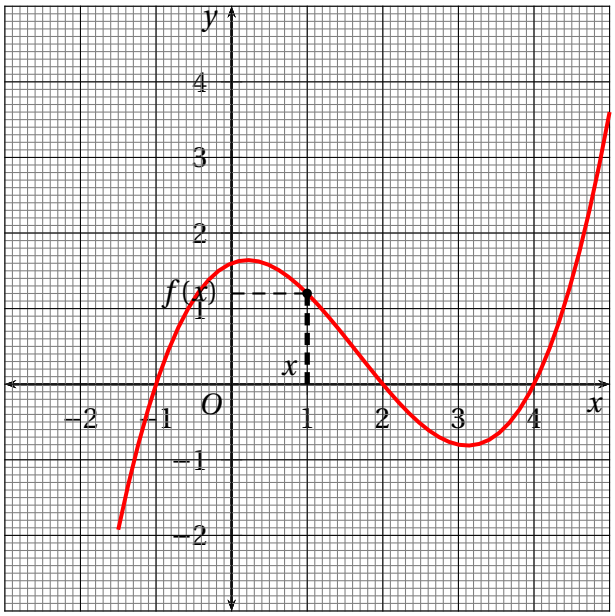
Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f, est l'ensemble des points $M(x\,;\ f(x))$ où $x \in \mathscr{D}$.

x est donc l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemple :

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,5\,;\,5]$



Lecture d'une image : Quelles sont les images de -1.5 ? de -1 ? de 0 ? de 1 ? de 2 ?
L'image de $-1,5$ est environ égale à -1,9 ; $\boxed{f(-1,5) \approx -1,9}$

L'image de -1 est 0 : $\boxed{f(-1) = 0}$

L'image de 0 est 1,6 : $\boxed{f(0) = 1,6}$

De mÍme : $f(1) = 1,2$; $\boxed{f(2) = 0}$

Lecture d'un antécédent : Quelles sont les antécédents de 0 ? de 1 ? de 2 ? de 4 ?
Pour lire les antécédents de 0, on regarde les abscisses des points de la courbe qui ont 0 pour ordonnée :
Les antécédents de 0 sont -1, 2 et 4.

Antécédents de 1 : approximativement -0,5 ; 1,2 et 4,4.

Antécédents de 4 : il n'y en a pas sur l'intervalle considéré.

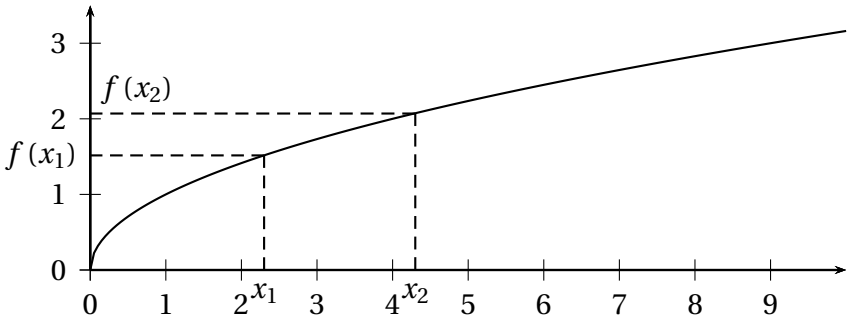
III Variations d'une fonction

III.1 Sens de variation

Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \leqslant f(x_2$.
(une fonction croissante conserve l'ordre.)

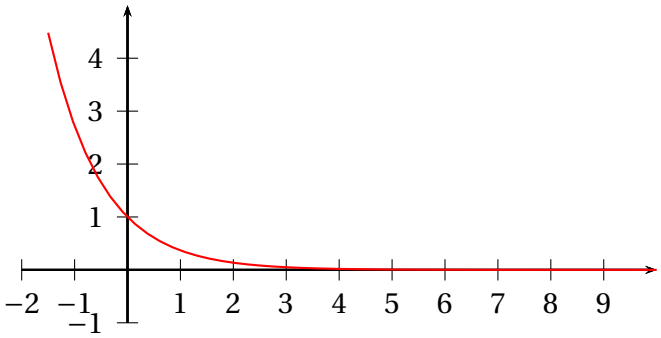
Exemple graphique :



Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \geqslant f(x_2$.
(une fonction croissante renverse l'ordre.)

Exemple graphique :

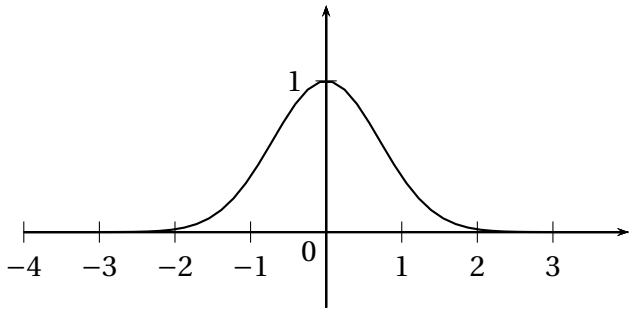


III.2 Extremum :

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
f admet un maximum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \leqslant f(a)$. f admet un minimum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \geqslant f(a)$. f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum.

Exemples :



Le maximum est 1, atteint en 0, mais f n'a pas de minimum.

III.3 Tableau de variation d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler toutes les informations sur les variations d'une fonction.

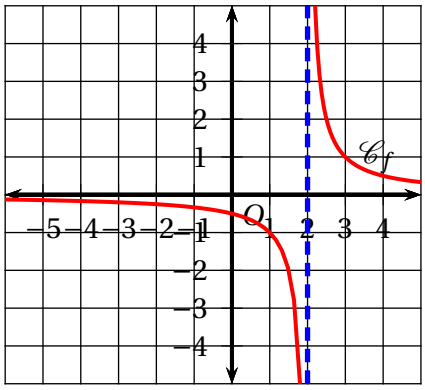
Exemples :

1. Soit la courbe ci-dessous, représentative de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4x$

La fonction f est définie sur $[-6;3]$, croissante sur $[-6;-4]$, décroissante sur $[-4;1]$ et croissante sur $[-1;3]$. On a : $f(-6) = 6$; $f(-4) = \dfrac{56}{3}$; $f(1) = -\dfrac{13}{6}$; $f(3) = \dfrac{21}{2}$.
Le tableau de variation est alors :

x	-6		-4		1		3
$f(x)$	6	↗	$\dfrac{56}{3}$	↘	$-\dfrac{13}{6}$	↗	$\dfrac{21}{2}$

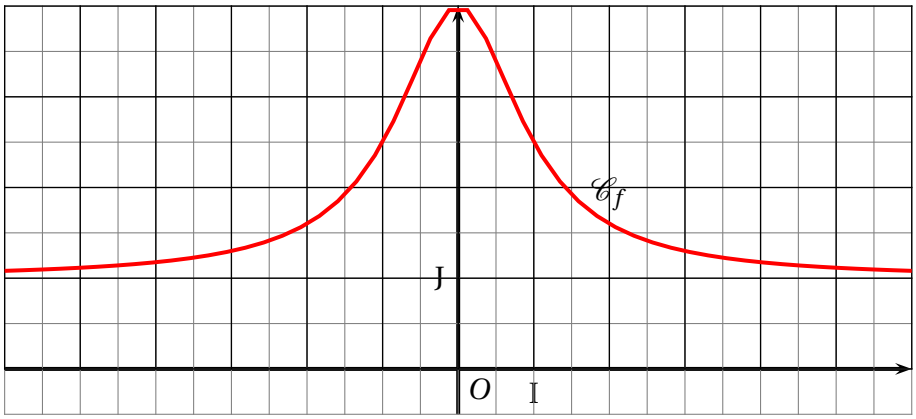
2. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$



La fonction f n'est **pas définie** en $x = 2$. On traduit cela par une double barre verticale dans le tableau de variation. La fonction est décroissante sur $]\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 0, de mÍme que quand x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2+1}$ dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. Le maximum de $f(x)$ est 4 ($f(0) = 4$). Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 1. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	4	↘	1