Fonctions carré et fonction inverse

Table des matières

I Fonction carré **1**
- I.1 Définition . . . 1
- I.2 Parité . . . 1
- I.3 Variations . . . 2
- I.4 Courbe représentative . . . 3
- I.5 Application . . . 3

II Fonction inverse **4**
- II.1 Définition . . . 4
- II.2 Parité . . . 5
- II.3 Variations . . . 5
- II.4 Courbe représentative . . . 6
- II.5 Application . . . 7

I Fonction carré

I.1 Définition

Définition

On appelle fonction carré la fonction $x \mapsto x^2$

Propriété

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

En effet, on peut calculer x^2 pour n'importe quelle valeur de $x \in \mathbb{R}$.

I.2 Parité

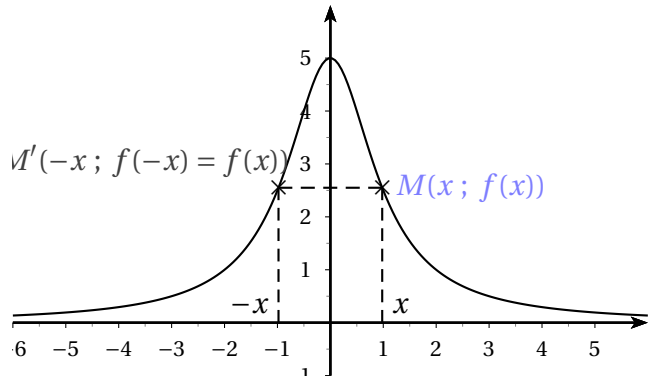
Définition

Une fonction f définie sur un ensemble I est paire si :

- I est symétrique par rapport à l'origine O du repère (donc, pour tout $x \in I$, $-x \in I$).
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$

Illustration graphique :

Conséquence graphique : la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des données.



Propriété

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est paire

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

I.3 Variations

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $[0\ ;\ +\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = x_1^2$ et $f(x_2) = x_2^2$.
  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geqslant 0$ donc $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
  En effet, $x_2 + x_1 \geqslant 0$ comme somme de nombres positifs et $x_2 - x_1 > 0$ car on a supposé $x_1 < x_2$.
  Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0]$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\ ;\ 0]$ avec $x_1 < x_2 \leqslant 0$.
  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\leqslant 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \leqslant 0$ $(x_1 + x_2 \leqslant 0)$ car les deux nombres sont négatifs.
  Les images cette fois sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : la fonction est décroissante.

  Remarque : sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on aurait pu utiliser la parité de la fonction et la symétrie de la courbe par rapport l'axe des ordonnées.

Tableau de variation :

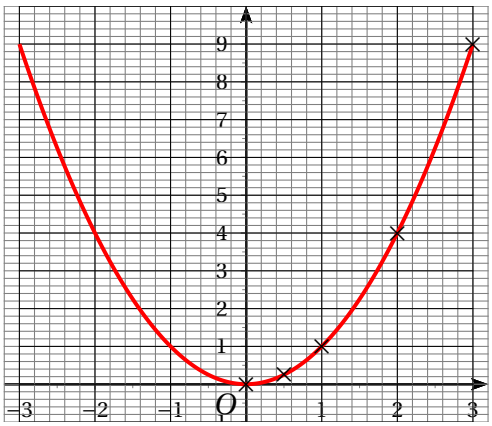
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

I.4 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on calcule des coordonnées de points. Comme la courbe est symétrique, on se limite à des valeurs positives et on construit les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

La courbe représentative de la fonction carré est appelée **parabole**.



I.5 Application

Exercice : comparer les carrés des nombres suivants :

a) $0,2^2$ et $0,21^2$

b) $(-2,4)^2$ et $(-2,41)^2$

c) $(-3,1)^2$ et $4,2$

Solution :

a) 0,2 et 0,21 sont positifs ; sur $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante.
$0,2 < 0,21$ donc $f(0,2) < f(0,21)$ donc $\boxed{0,2^2 < 0,21^2}$

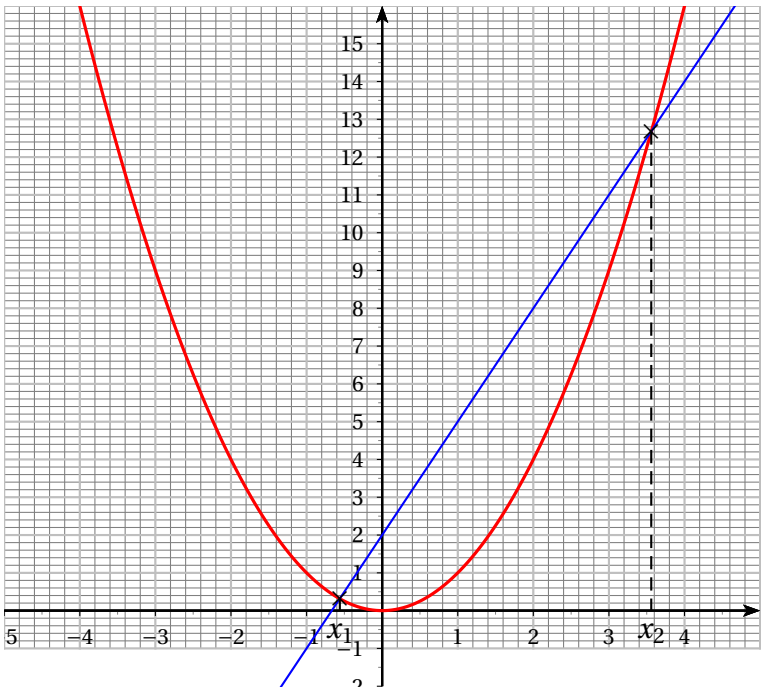
b) -2,4 et -2,41 sont négatifs ; sur $]-\infty\ ;\ 0]$, f est décroissante.
$-2,4 > -2,41$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-2,4)^2 < -2,41^2}$.

c) $(-3,1)^2 = 3,1^2$ donc il suffit de comparer $3,1^2$ et $4,2^2$.
3,1 et 4,2 sont positifs et $3,1 < 4,2$; sur $[0\ ;\ +\infty[$, f est croissante, donc $3,1^2 < 4,2^2$, d'où $\boxed{(-3,1)^2 < 4,2^2}$

Exercice : résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 3x + 2$.
On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x + 2$.

On trace les courbes représentatives de ces fonctions. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

Puisqu'il s'agit d'une lecture graphique, les valeurs trouvées sont des valeurs approchées des solutions. la méthode pour trouver les valeurs exactes sera vue en Première.



On trouve deux solutions : $x_1 \approx -0,5$ et $x_2 \approx 3,6$

II Fonction inverse

II.1 Définition

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

II.2 Parité

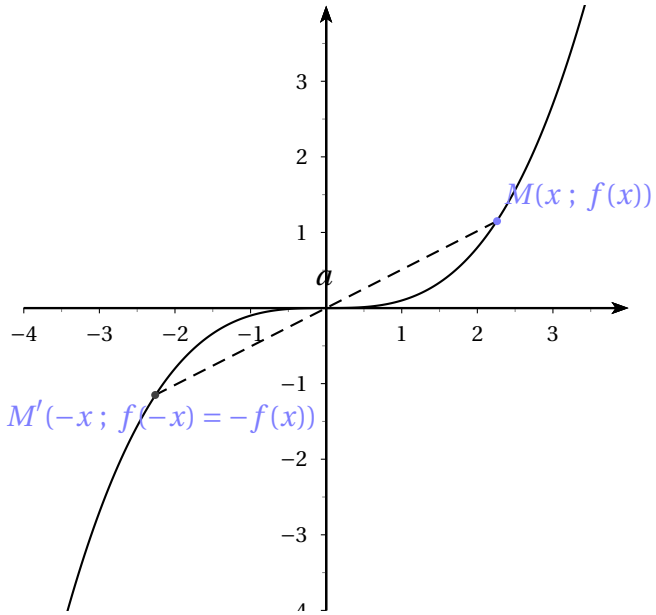
Définition

Une fonction f définie sur un ensemble I est impaire si :

- I est symétrique par rapport à l'origine O du repère (donc, pour tout $x \in I$, $-x \in I$).
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$

Conséquence graphique : la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Illustration graphique :



Propriété

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

II.3 Variations

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\ ;\ +\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.
  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\ ;\ 0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.
  On a le mÍme calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

  Remarque : sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on aurait pu utiliser la symétrie de la courbe par rapport à O.

Tableau de variation :

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

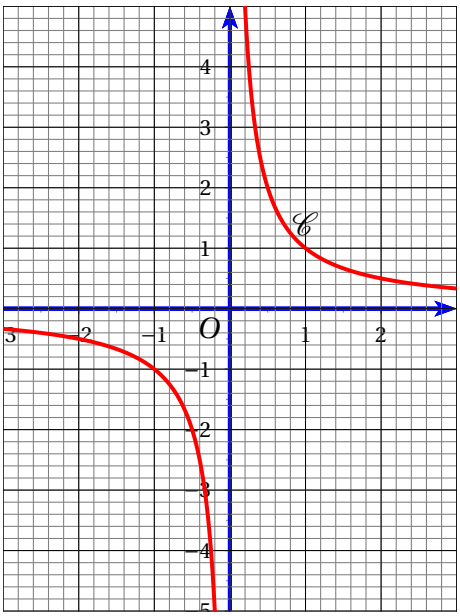
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	‖	↘	0

II.4 Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches.



II.5 Application

Exercice : comparer les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{0,2}$ et $\dfrac{1}{0,3}$

b) $-\dfrac{1}{2,4}$ et $-\dfrac{1}{2,5}$

c) $-\dfrac{1}{3,1}$ et $\dfrac{1}{4,2}$

Solution :

a) 0,2 et 0,3 sont positifs ; sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante.

$0,2 < 0,3$ donc $f(0,2) > f(0,3)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{0,2} > \dfrac{1}{0,3}}$

b) -2,4 et -2,5 sont négatifs ; sur $]-\infty\,;\,0[$, f est décroissante.

$-2,4 > -2,5$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-\dfrac{1}{2,4}) < -\dfrac{1}{2,5}}$.

c) $-3,1 < 0$ et $4,2 > 0$ donc $-\dfrac{1}{3,1} < 0$ et $\dfrac{1}{4,2} > 0$ donc $\boxed{-\dfrac{1}{3,1} < \dfrac{1}{4,2}}$.

Remarque : ici, on ne pouvait pas utiliser les variations de la fonction inverse, car les nombres -3,1 et 4,2 ne sont par dans les mêmes intervalles définition de la fonction inverse.