Correction du contrôle commun n° 1

Exercice 1

Pour la représentation graphique, tout le monde n'a pas la même convention, puisque certains hachurent la partie solution et d'autres les parties non-solutions.
Il faut préciser les conventions que vous utilisez !

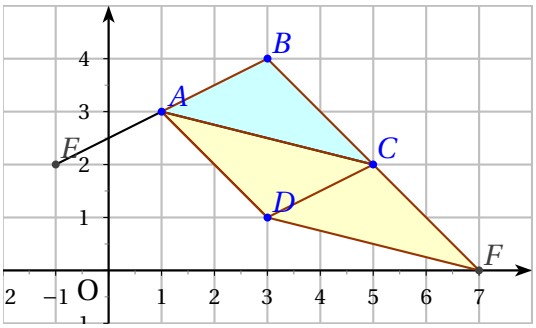
Inégalités	Phrase	Appartenance à un ensemble	Représentation graphique
$x < 3$	x est strictement inférieur à 3	$x \in]-\infty\,;\,3[$	
$2 < x < 7$	x est strictement supérieur à -2 et strictement inférieur à 7	$x \in]-2\,;\,7[$	
$x < -3$ ou $x > 6$	x strictement inférieur à -3 ou x est strictement supérieur à 6	$x \in]-\infty; -3[\cup]6; +\infty[$	
$x \leqslant -1$ ou $x > 0$	x est inférieur ou égal à -1 ou x est strictement supérieur à 0	$x \in]-\infty\,;\,-1][\cup]0\,;\,+\infty[$	si on prend comme convention que les parties hachurées sont solutions
$-5 \leqslant x < 1$	x est supérieur ou égal à -5 et x strictement inférieur à 1	$x \in [-5\,;\,1[$	

Exercice 2

1. Les coordonnées des points A ; B et C sont A(1 ; 3) , B(5 ; 1) et C(4 ; 9).
2. On est dans un repère orthonormé donc :
   AB $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-3)^2} = \boxed{\sqrt{20}}$.
   De même : $BC = \sqrt{(4-5)^2 + (9-1)^2} = \boxed{\sqrt{65}}$.
   AC $= \sqrt{(4-1)2 + (9-3)2} = \boxed{\sqrt{45}}$.
3. Dans le triangle ABC, le côté le plus long est [BC].
   D'une part $BC^2 = 65$,
   d'autre part $AB^2 + AC^2 = 20 + 45 = 65$
   Donc $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$ donc, d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 3

1. **Figure** :



2. Soit M le milieu de [AC] ; $M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$ donc $\boxed{M\left(3\ ;\ \frac{5}{2}\right)}$.

   Soit N le milieu de [BD], on obtient de même : $N\left(\frac{3+3}{2}\ ;\ \frac{4+1}{2}\right)$ soit $\boxed{N\left(3\ ;\ \frac{5}{2}\right)}$.

3. Ainsi M = N (puisqu'ils ont les mêmes coordonnées) donc les diagonales du quadrilatère ABCD se croisent en leur milieu. On en déduit que ABCD est un **parallélogramme**.

4. Soit $E(x_E\ ;\ y_E)$, ; par définition de E, A est le milieu de [EB]. On en déduit que :
   $\left(\frac{x_E+3}{2}\ \frac{y_E+4}{2}\right) = (1\ ;\ 3)$ d'où $\boxed{x_E=-1 \text{ et } y_E=2}$.
   E a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2)$.

5. Pour que ACFD soit un parallélogramme, il faut que [AC] et [FD] aient le même milieu.
   Notons x_F et y_F les coordonnées de F.
   On doit avoir $\frac{1+x_F}{2} = \frac{3+5}{2}$ d'où $1+x_F=8$ d'où $\boxed{x_F=7}$.
   De même : $\frac{3+y_F}{2} = \frac{1+2}{2}$ donc $3+y_G=3$, d'où $\boxed{y_F=0}$.
   Le point F a pour coordonnées (7 ; 0).

6. $\boxed{CE=6}$ (évident puisque les deux points ont la même pardonnée) et $CF=\sqrt{(7-5)^2+(0-2)^2}=\boxed{\sqrt{8}}$.
   $CE \neq CF$ donc **C n'appartient pas à la médiatrice de [EF]**.

Exercice 4

1. $\boxed{\mathscr{D}_f=[-4\ ;\ 5]}$.
2. $\boxed{f(-4)=4}$; $\boxed{f(-2)=1,7}$; $\boxed{f(0)=1}$ et $\boxed{f(2)=4}$.
3.
   - Les antécédents de 3 sont -3 ; 6 ; -1 ; 1,4 et 4.
   - Les antécédents de 1 sont 0 et 4,7.
   - -2 n'a pas d'antécédent.
4. f est décroissante sur [-4 ; -2 ; 5], sur [-1 ; 0] et sur [2 ; 5] : f est croissante sur [-2,5 ; -1] et sur [0 ; 2].

Exercice 5

1. $f(0)=-2\times 0+3=\boxed{3}$; $f(1)=-2\times 1+3=\boxed{1}$; $f(-1)=-2\times(-1)+3=\boxed{5}$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=-2\times\frac{1}{3}+3=+\frac{2}{3}+\frac{9}{3}=\boxed{\frac{7}{3}}$
2. $g(2)=2^2-3\times 2+2=0$; $g(-3)=(-3)^2-3\times(-3)+2=9+9+2=\boxed{20}$
   $g\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}^2\right)-3\times\sqrt{2}+2=2-3\sqrt{2}+2=\boxed{4-3\sqrt{2}}$; $g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-3\times\frac{2}{3}+2=\frac{4}{9}=2+2=\boxed{\frac{4}{9}}$
   car $3\times\frac{2}{3}=2$ en simplifiant par 3

Exercice 6

Calcul d'antécédents :

- $h(x)=7 \Leftrightarrow x^2+3=7 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$.
  Les antécédents de 7 par h sont -2 et 2.
- $h(x)=3 \Leftrightarrow x^2+3=3 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.
  L'antécédent de 3 par h est 0.
- $h(x)=1 \Leftrightarrow x^2+3=1 \Leftrightarrow x^2=-2$; impossible car -2 est strictement négatif.
  1 n'a pas d'antécédent par h.

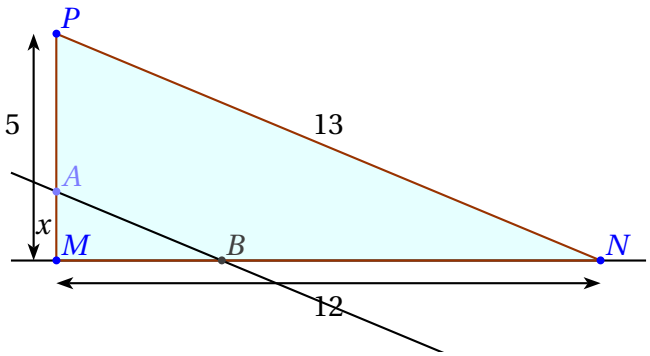
- $h(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$?
  Les antécédents de 5 par h sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Exercice 7

- $\boxed{A(x) = -2x2 + 6x}$
- $\boxed{B(x) = 4x^2 + \frac{x}{2} - 1}$
- $C(x) = -6x + 4x^2 + 15 - 10x$ donc $\boxed{C(x) = 4x^2 - 16x + 15}$

Exercice 8

1. Figure :



2. Dans le triangle rectangle en M, on applique le théorème de Pythagore : $\text{MN}^2 + \text{MP}^2 = \text{NP}^2$ donc $\text{MN}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; comme MN est un nombre positif, on a $\text{MN} = \sqrt{144} = 12$; $\boxed{\text{MN} = 12}$?
3. (a) x est une longueur donc x est positif et A $\in$ [MP] donc $x \in MP$ soit $\boxed{x \in [0\,;\,5]}$.
   (b) Les triangles MAB et MPN sont formés par des droites parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a :
   $\frac{\text{MB}}{\text{MN}} = \frac{\text{AB}}{\text{NP}} = \frac{\text{AM}}{\text{MP}}$ donc : $\frac{\text{MB}}{12} = \frac{\text{AB}}{13} = \frac{\text{x}}{5}$.
   On obtient ainsi, $\boxed{AB = \frac{13x}{5}}$ et $\boxed{\text{MB} = \frac{12x}{5}}$.
4. Le périmètre de AMP est : $\mathscr{P}(AMP) = AM + MB + BA = x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = 6x$.
5. Le périmètre de ABNP est : $\mathscr{P}(ABNP) = AP + PN + NB + BA = (5 - x) + 13 + \left(12 - \frac{12x}{5}\right) + \frac{13x}{5} = 30 - x + \frac{x}{5}$
   $= \boxed{30 - \frac{4x}{5}}$
6. $\mathscr{P}(PAMP) = \mathscr{P}(ABNP) \Leftrightarrow 6x = 30 - \frac{4x}{5} \Leftrightarrow 30x = 150 - 4x \Leftrightarrow 34x = 150 \Leftrightarrow x = \frac{150}{34} = \frac{75}{17} \in [0\,;\,5]$.
   Donc les deux périmètres sont égaux pour $\boxed{x = \frac{150}{34}}$. .