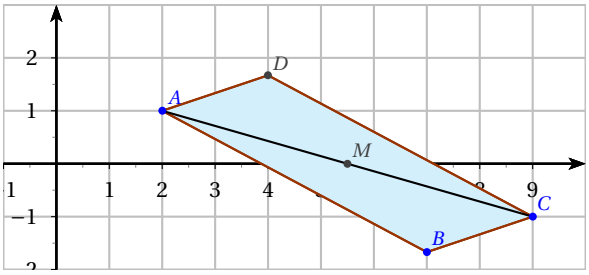
2nde : correction du contrôle

I

Soient les points $A(2\,;\,1)$, $B\left(7\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$ et $C(9\,;\,-1)$.



1. Soit M le milieu de [AC].
   $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+9}{2} = \dfrac{11}{2}$ et
   $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0$.
   M a pour coordonnées $\boxed{M\left(\dfrac{11}{2}\,;\,0\right)}$.

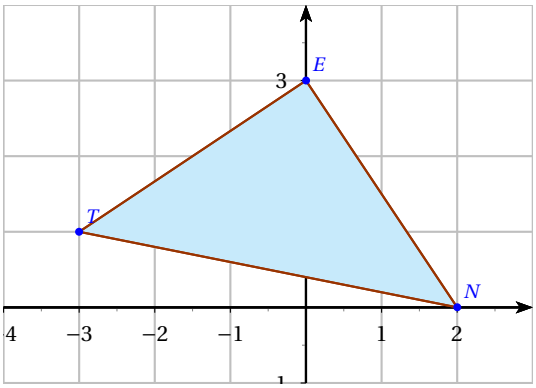
2. ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu, donc si, et seulement si, M est aussi le milieu de [BD].
   On doit avoir $x_M = \dfrac{11}{2} = \dfrac{7 + x_D}{2}$ donc $7 + x_D = 11$ d'où $x_D = 11 - 7 = 4$.
   De même : $y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$ donc $0 = \dfrac{-\dfrac{5}{3} + y_D}{2}$; on en déduit que $y_D = \dfrac{5}{3}$.
   Le point D a pour coordonnées $\boxed{D\left(4\,;\,\dfrac{5}{3}\right)}$.

II

La distance AB vaut :
$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A^2\right) + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (7-1)^2}$
$= \sqrt{1+36} = \boxed{\sqrt{37} > 6}$.
Le point B est à **l'extérieur** du cercle de centre A et de rayon 6.

III

1. On considère les points N(2 ; 0), E(0 ; 3) et T(−3 ; 1).

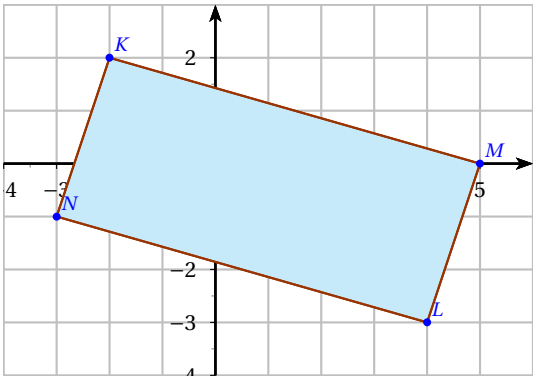


2. • $NE = \sqrt{(0-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$.
   • $ET = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$.
   • $NT = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{26}}$.

3. NE = ET donc le triangle NET est isocèle en E.
   $NT^2 = 26$; $NE^2 + ET^2 = 13 + 13 = 26$ donc $NT^2 = NE^2 + ET^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NET est **rectangle** en E.
   Il est donc **isocèle rectangle** en E.

IV

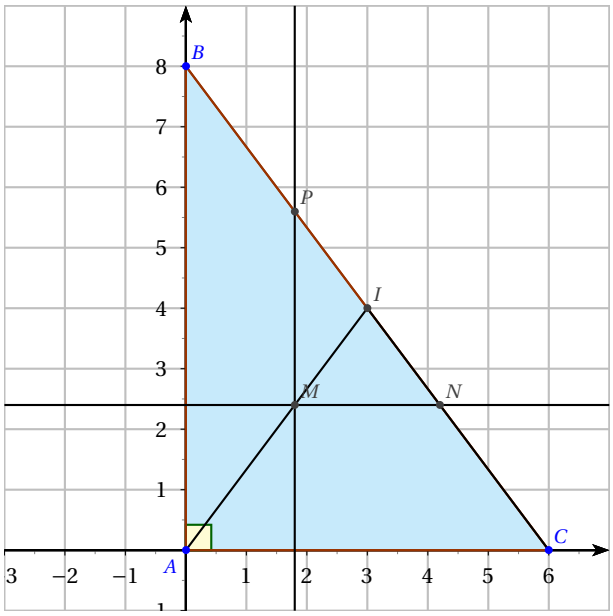
Dans un repère orthonormé (0 ; I ; J), on considère les points K(−2 ; 2), L(4 ; −3), M(5 ; 0) et N(−3 ; −1).

1. 

2. Soit P le milieu de [KL] ;; $x_P = \dfrac{x_K + x_L}{2} = 1$:
   $y_P = \dfrac{y_K + y_L}{2} = -\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{P\left(1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.
   Soit Q le milieu de [NM] ;; $x_Q = \dfrac{x_N + x_M}{2} = 1$:
   $y_Q = \dfrac{y_N + y_M}{2} = -\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{Q\left(1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.
   P et Q ont les même coordonnées donc P=Q ; les diagonales [KL] et [NP] du quadrilatère KNLM se coupent en leur milieu, donc KNLM est un **parallélogramme**.

3. $KL = \sqrt{(4-(-2))^2+(-3-2)^2} = \sqrt{36+25} = \boxed{\sqrt{61}}$.
   $NM = \sqrt{(5-(-3))^2+(0-(-1))^2} = \sqrt{64+1} = \boxed{\sqrt{65}}$
4. Les diagonales de ce parallélogramme n'ont pas la même longueur, donc **ce n'est pas un rectangle**.

V Brevet, Asie juin 2003

1. 

2. ABC est un triangle rectangle en A. On applique le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ donc $\boxed{\text{BC} = \sqrt{64} = 8}$.
3. (a) Voir figure
   (b) ABC est un triangle rectangle ; le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse, donc I ; le rayon de de ce cercle est donc $\text{IA} = \dfrac{\text{BC}}{2} = 5$ donc IA = IB = IC = 5.
4. (a) Voir figure.
   (b) Voir figure.
   (c) Les triangles IPM et IBA sont formés par des droites parallèles et ont un point commun.
   On applique le théorème de Thalès :
   $\dfrac{\text{IP}}{\text{IA}} = \dfrac{\text{IM}}{\text{IA}}$ donc $\dfrac{\text{IP}}{5} = \dfrac{2}{5}$ d'où $\boxed{IP = 2}$.
5. **Question facultative**
   (a) Voir figure
   (b) I, M et A sont alignés ; I, N et C sont alignés dans le même ordre.
   $\dfrac{\text{IM}}{\text{IA}} = \dfrac{2}{5}$; $\dfrac{\text{IN}}{\text{IC}} = \dfrac{2}{5}$ donc $\dfrac{\text{IM}}{\text{IA}} = \dfrac{\text{IN}}{\text{IC}}$.
   D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AC) sont parallèles.