2nde : correction du contrôle (factorisations-équations)

I

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x) = (x+1)(x+2)+3(x+1) = (x+1)[(x+2)+3]$
$= \boxed{(x+1)(x+5)}$

$B(x) = (x-3)(x+1)+2x-6 = (x-3)(x+1)+2(x-3)$
$= (x-3)[(x+1)+2] = \boxed{(x-3)(x+3)}$

$C(x) = (3x+7)^2-(2x+1)^2 = a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
avec $a = (3x+7)$ et $b = (2x+1)$
$= [(3x+7)+(2x+1)][(3x+7)-(2x+1)]$
$= (3x+7+2x+1)(3x+7-2x-1)$
$= \boxed{(5x+8)(x+6)}$

II

Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{2x+1}{x-1} = 0$
Ensemble de définition : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On suppose que $x \neq 1$.
Alors $\dfrac{2x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \in \mathscr{D}$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$.

b) $(2x+3)^2 = 49$
L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
$(2x+3)^2 = 49 \Leftrightarrow (2x+3)^2-49=0 \Leftrightarrow (2x+3)^2-7^2=0$
$\Leftrightarrow [(2x+3)+7][(2x+3)-7]=0 \Leftrightarrow (2x+10)(2x-4)=0$
$\Leftrightarrow 2(x-5)\times 2(x-2)=0 \Leftrightarrow 4(x+5)(x-2)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2)=0$.
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$
- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\,;\,2\}}$

c) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+1} = 0$
Ensemble de définition : il faut que les deux fractions soient définies, donc que les deux dénominateurs ne s'annulent pas, donc que $x \neq -1$ ou que $x \neq 1$.
$\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$.
Pour $x \in \mathscr{D}$, on a :
$\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0$
$\Leftrightarrow 3(x+1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow 3x+3-2x+2=0 \Leftrightarrow x+5=0$
$\Leftrightarrow x=-5 \in \mathscr{D}$.
L'emsemble des solutions de cette équation est $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\}}$.

III

- Notons x le prix d'un livre en euros.
- La dépense pour le premier établissement est $25x$.
  Pour le deuxième établissement, cette dépense est 30(x-2).
- **Mise en équation** : Les deux dépenses sont égales, donc, on doit avoir :
  $25x = 30(x-2)$.
- **Résolution** : $25x = 30(x-2) \Leftrightarrow 25x = 30x-60 \Leftrightarrow -5x = -60$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{-60}{-5} = 12$.
- **Conclusion** : dans le premier établissement, le prix de chaque livre est de 12 euros.

IV

- Soit x le nombre cherché.
- **Mise en équation** : on doit avoir $\dfrac{2+x}{7+x} = 2\times\dfrac{2}{7}$ donc $\dfrac{2+x}{7+x} = \dfrac{4}{7}$.
- **Résolution** : on doit avoir $x \neq -7$.
  Pour $x \neq -7$, l'équation donne : $7(2+x) = 4(7+x)$
  $\Leftrightarrow 14+7x = 28+4x \Leftrightarrow 7x-4x = 28-14 \Leftrightarrow 3x = 14 \Leftrightarrow x = \dfrac{14}{3}$.
  Ce nombre n'est **pas un entier**.
- **Conclusion** : on ne peut pas trouver d'entier qui, ajouté au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{2}{7}$, donne le double de ce nombre.rationnel.

V

- Soit x la longueur d'un côté du carré initial.
- L'aire du carré initial vaut x^2.
- On augmente la longueur de 3, donc le nouveau carré a un côté mesurant $x+3$; son aire vaut $(x+3)^2$.
- **Mise en équation** : $(x+3)^2 = x^2+21$.
- **Résolution** : en développant, on obtient : $x^2+6x+9 = x^2+21$, d'où $6x+9=21$.
  On en déduit $6x = 12$, soit $x = \dfrac{12}{6} = 2$.
- **Conclusion** : le côté du carré initial mesure 2.

VI

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3-24x^2+36x$.

1. Factorisons $f(x)$.
   On remarque d'abord un facteur commun qui est $4x$.
   $f(x) = 4x\left(x^2-6x+9\right)$.
   On remarque alors que x^2-6x+9 est une identité remarquable.
   Alors : $f(x) = 4x\left(x^2-2\times x\times 3+3^2\right) = \boxed{4x(x-3)^2}$.
2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$.
   $f(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x-3)^2=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   Premier cas : $4x=0$ donc $x=0$.
   Deuxième cas : $(x-3)^2=0$ d'où $x=3$.
   Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses 0 et 3.

Pour information, voilà la courbe obtenue avec un logiciel :