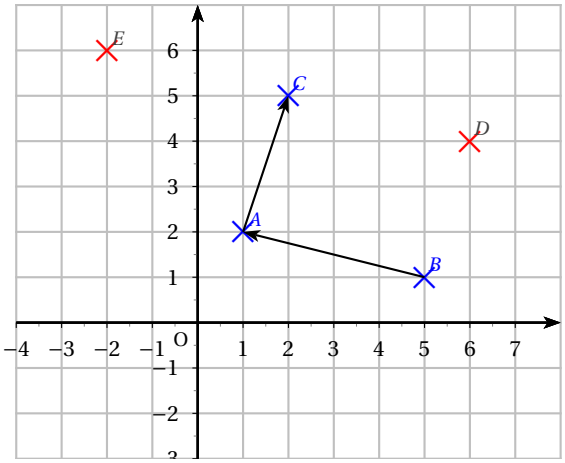
2nde : correction du contrôle sur les vecteurs (1 heure)

I (2 points)

On considère ABC le triangle représenté ci-dessous.

1. D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. (voir figure ci-dessous)
2. E est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. (voir figure ci-dessous)



II (3 points)

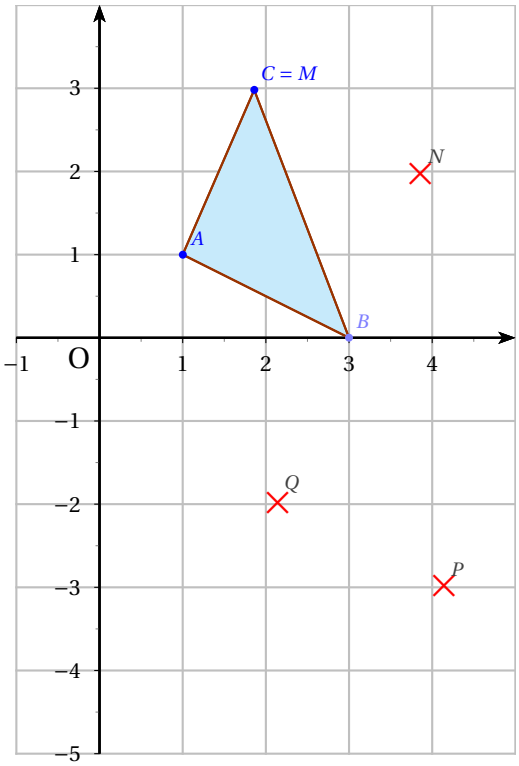
Sur la figure ci-dessous, on a représenté un triangle ABC.

- M est défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles, donc M=C.
- N est défini par : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. [AN] est donc la diagonale du parallélogramme construit sur les deux côtés consécutifs [AB] et [AC].
- P est défini par : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

  Soit P le point tel que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CB}$ (donc P est le symétrique de C par rapport à B).
  Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP}$ (d'après la relation de Chasles).
- Q est défini par : $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ (d'après la relation de Chasles).

  On doit avoir $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CB}$



III (3 points)

Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A(-2 ; 3), B(5 ; 7) et C(7 ; 8).

On a : $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}}$.

$7 \times 5 - 4 \times 9 = 35 - 36 = -1 \neq 0$.

D'après la condition de colinéarité, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B et C ne sont **pas alignés**.

IV (3 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(4 ; 1) et B$\left(-\frac{3}{2} ; 6\right)$.

1. • $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ donc $OA = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$: $\boxed{OA = \sqrt{17}}$

   • $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\6\end{pmatrix}$ donc $OB = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6^2}$

   $= \sqrt{\frac{9}{4} + 36} = \sqrt{\frac{153}{4}}$: $\boxed{OB = \frac{\sqrt{153}}{4}}$

   • $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}-4\\6-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\5\end{pmatrix}$ donc $AB =$

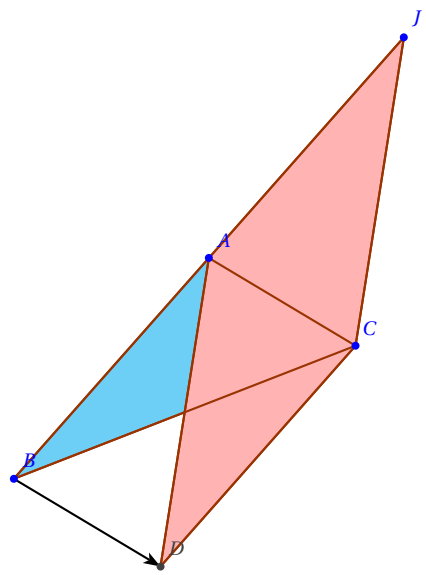
$\sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2+5^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+25} = \sqrt{\frac{221}{4}}$: $\boxed{AB=\sqrt{\frac{221}{4}}}$

2. On a $AB^2=\frac{221}{4}$.
   $OA^2+OB^2=17+\frac{153}{4}=\frac{68+153}{4}=\frac{221}{4}$.
   On en déduit que $\boxed{AB^2=OA^2+OB^2}$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est **rectangle** en O.

V (3 points)

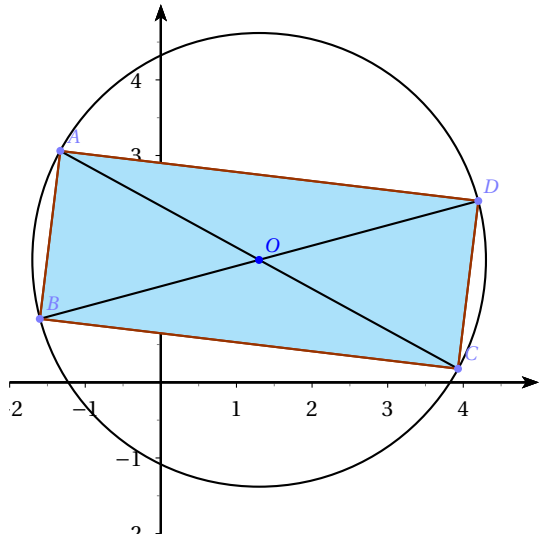
ABC est un triangle quelconque .

1. D est tel que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$, puis J est tel que A soit le milieu de [BJ]. (voir figure)
2. (a) Par construction, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ donc ABDC est un parallélogramme.
   On en déduit $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.
   Par construction, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AJ}$.
   On en déduit $\boxed{\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AJ}}$.
   (b) Puisque $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AJ}$, DCJA est un **parallélogramme**.



VI (3 points)

1. [AC] et [BD] sont les diagonales du quadrilatère ABCD. Comme ce sont deux diamètres du cercle, ils se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.
   De plus, ces deux segments ont la même longueur, donc ABCD est un rectangle.
2. Alors, comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ est le vecteur représentant la diagonale du parallélogramme ABCD, donc $\overrightarrow{AC}$.



VII (3 points)

Soit ABC un triangle et M le point tel que

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

1. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\boxed{\overrightarrow{AC}}$ d'après la relation de Chasles.
2. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$
   $=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=$
   $\boxed{\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$
3. Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   On a $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=$
   $\boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}}$.
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont **colinéaires** ; les points A, M et N sont donc **alignés**.