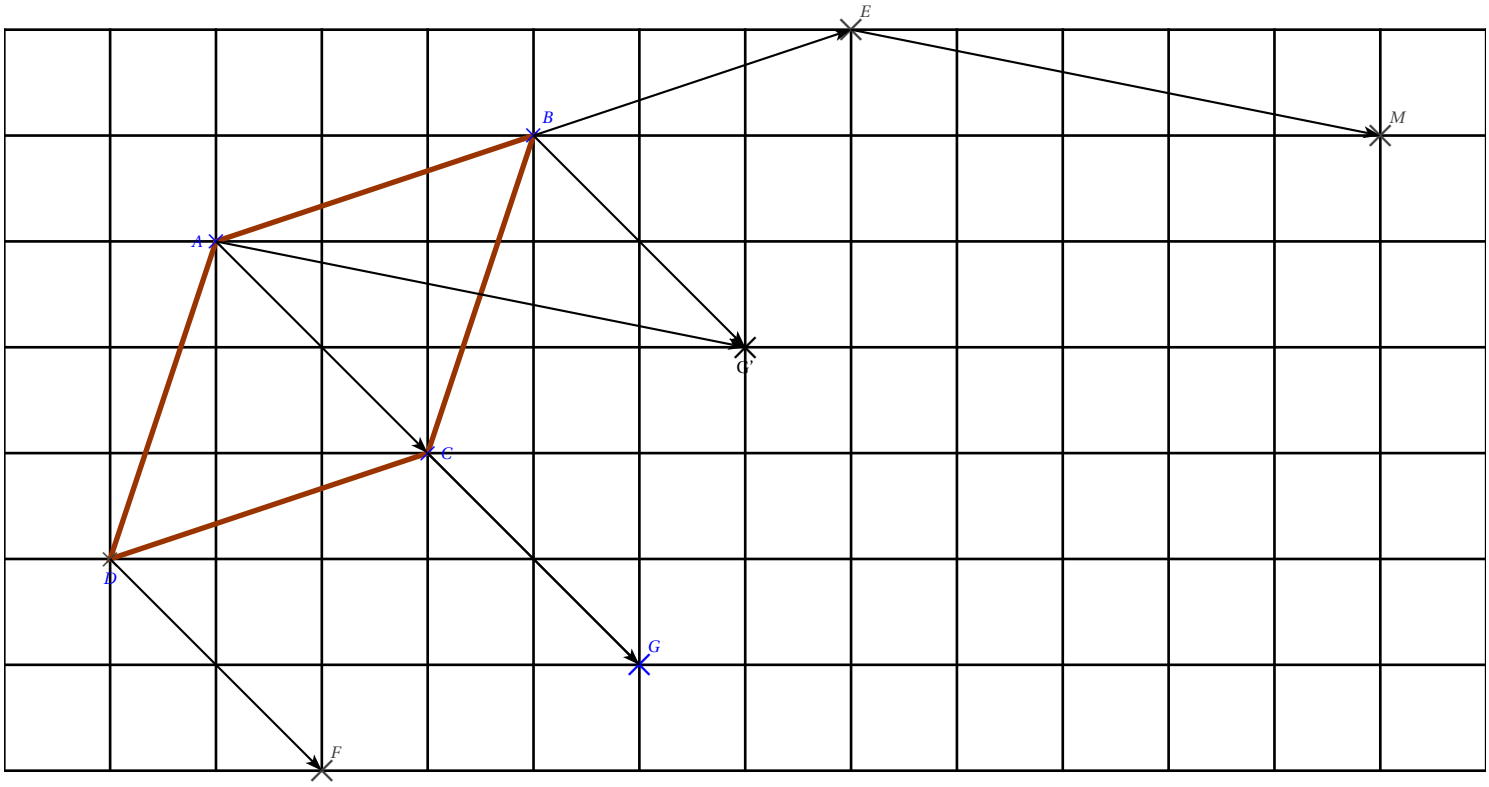
Correction du contrôle commun n° 3

I

Soit ABCD un parallélogramme
On complètera la figure ci-dessous. On laissera les traits de construction.

1. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$, donc B est le milieu de [AE].
2. Par construction, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$.
3. Par définition, C est le milieu de [AG].
4. Soit G' tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BG'}$.
   Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{AG'}$ (relation de Chasles).
   On construit alors M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AG'}$.
5. D'une part, C est le milieu de [AG], donc : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CG}$.
   D'autre part : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$.
   ON en déduit que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CG}$.
   Par conséquent, CGFD est un **parallélogramme**.



II

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous (O ; I ; J), placer les points A(2 ; 2), B(-2 ; -1) et C(-5 ; 3).
2. (a) On obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

   (b)
   - $AB = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9}$
     $= \sqrt{25} = \boxed{5}$.
   - $AC = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$
     $= \boxed{5\sqrt{2}}$.
   - $BC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

   (c)
   - AB = BC = 5 donc ABC est **isocèle**.
   - $BC^2 = 50$ et $AB^2 + AC^2 = 25 = 25 = 50$ donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
     D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est **rectangle**

   Conclusion : ABC est isocèle rectangle en A.

3. Soit $E\left(8\,;\,\frac{13}{2}\right)$.

   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$.

   On a : $-4 \times \frac{9}{2} - (-3) \times 6 = -18 + 18 = 0$.

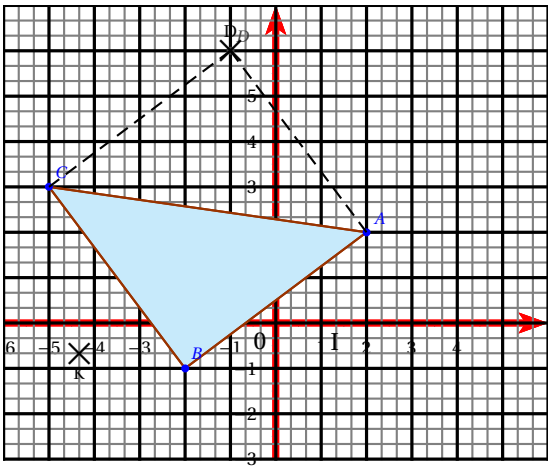
D'après la **condition de colinéarité**, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont **colinéaires** et on en déduit que les points A, B et E sont **alignés**.

4. (a) Soit D tel que ABCD soit un parallélogramme. D a pour coordonnées $D\left(x_D\,;\,y_D\right)$.
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-5-x_D\\3-y_D\end{pmatrix}$.
Les deux vecteurs sont égaux, donc leurs coordonnées sont égales.
On obtient le système $\begin{cases}-5-x_D=-4\\3-y_D=-3\end{cases}$ On en déduit $\boxed{x_D=-1}$ et $\boxed{y_D=6}$

(b) Comme le triangle ABC est isocèle et rectangle en A, on en déduit que ABCD est un **carré**.

5. (a) Soit K tel que $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AB}$.. On appelle x_K et y_K les coordonnées de K.
$\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}x_K-(-5)\\y_K-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}-2-x_K\\-1-y_K\end{pmatrix}$ donc
$2\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}2(-2-x_K)\\2(-1-y_K)\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K+5=-4-2x_K-4\\y_K-3=-2-2y_K-3\end{cases}$.
On en déduit :
$\begin{cases}3x_K=-13\\3y_K=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\dfrac{13}{3}\\y_K=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$.
K a pour coordonnées $\boxed{\left(-\dfrac{13}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)}$.

(b) Voir figure.



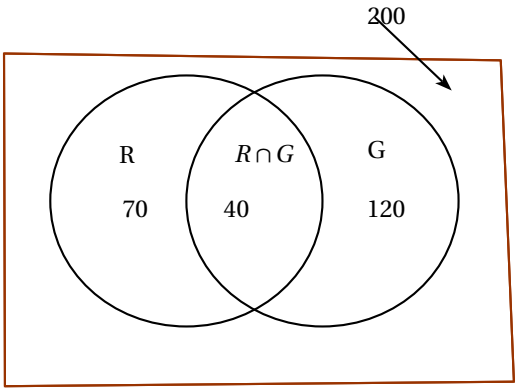
III

Une agence de location de véhicules possède un parc de 200 voitures. Certaines possèdent différentes options : 120 véhicules ont un GPS. 70 véhicules ont un radar de recul. 40 véhicules ont un radar de recul et un GPS.

Un employé prend un véhicule au hasard. On note

- R l'événement : « le véhicule a un radar ».
- G l'événement : « le véhicule a un GPS ».
- S l'événement : « le véhicule n'a ni radar, ni GPS ».

1. Schéma :



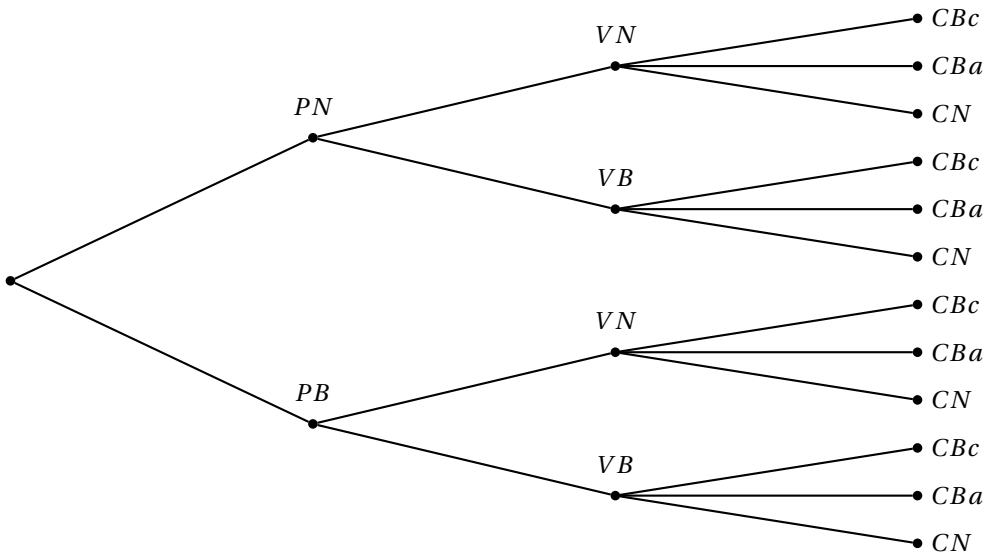
2. Chaque voiture a la même probabilité d'être choisie. Nous sommes donc en situation d'équiprobilité.
La probabilité d'un événement est donc le nombre total de cas possibles, divisé par le nombre total de cas possibles.
D'après l'énoncé, on a :
$\boxed{p(R)=\dfrac{70}{200}=\dfrac{7}{20}}$ et $\boxed{p(G)=\dfrac{120}{200}=\dfrac{3}{5}}$.

3. - $R\cap G$ est l'éventent « le véhicule choisi a un radar **et** un GPS ».
   - $R\cup G$ est l'éventent « le véhicule choisi a un radar **ou** un GPS »
   - $\overline{R}$ est l'éventent « le véhicule choisi n'a **pas de radar** ».
   - $\overline{R}\cap\overline{G}$ est l'éventent « le véhicule choisi n'a **ni radar ni GPS** ».

4. - 40 véhicules ont le radar et un GPS donc
$p(R\cap G)=\dfrac{40}{200}=\boxed{\dfrac{1}{5}}$.
   - $p(R\cup G)=p(R)+p(G)-p(R\cap G)=\dfrac{7}{20}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{7+12-4}{20}=\dfrac{15}{20}=\boxed{\dfrac{3}{4}}$.
   - $p\left(\overline{R}\right)=1-p(R)=1-\dfrac{7}{20}=\boxed{\dfrac{13}{20}}$.
   - $p\left(\overline{R}\cap\overline{G}\right)=p\left(\overline{R\cup G}\right)=1-p(R\cup G)=1-\dfrac{3}{4}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$.

IV

1. Représentons la situation par un arbre. On note PN pour pantalon noir, PB pour pantalon blanc, VN pour veste noire, VB pour veste blanche, CBc pour chemise blanche classique, CBa pour chemise blanche ajustée et CN pour chemise noire.



L'arbre comprend douze branches, donc il y'a douze façons de s'habiller.

2. — Une seule branche correspond à un habillage tout en noir, donc $\boxed{p(A) = \frac{1}{12}}$.
   — Six branches correspondent à l'événement (veste et pantalon de couleurs différentes) : les branches commençant par PN-VB et PB-VN B; $p(B) = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$
   — Quatre branches correspondent à l'événement C, donc $p(C) = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

V

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. f est une fonction polynôme du second degré, donc la courbe représentative de f est une **parabole**.
   Le coefficient de x^2 est 1, donc positif ; la parabole est donc tournée vers le haut.
2. Cherchons la forme canonique de $f(x)$.
   $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.
   La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
   On a $\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$ d'où $\beta = f(2) = -1$.
   La forme canonique est donc $\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 1}$.
3. Le sommet (minimum a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ donc $(2\ ;\ -1)$.
4. La courbe a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$, donc la droite d'équation $x = 2$.
5. On a $f(x) = (x-2)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1^2 = [(x-2)-1][(x-2)+1] = \boxed{(x-3)(x-1)}$
6. Pour trouver le signe de $f(x)$, on renseigne un tableau de signes, en cherchant le signe de chaque facteur.
   $f(x)$ s'annule en 1 et en 3.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Résoudre :
   (a) $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$
   $\Leftrightarrow x(x-4) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On en déduit $x = 0$ ou $x = 4$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{0\ ;\ 4\}}$
   (b) $f(x) < 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 9 < 0$
   $\Leftrightarrow [(x-2)-3]\,[(x-2)+3] < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) < 0$.
   On renseigne un tableau de signes.
   $(x-5)(x+1)$ s'annule pour $x = -1$et $x = 5$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} =]-1\ ;\ 5[}$.
   (c) Pour vérifier sur une calculatrice, on trace la courbe représentative de f, la droite d'équation $y = 8$ et on regarde les abscisses des points de la courbe situés en dessous ce cette droite.

VI

1. L'aire du triangle est $\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{bh}{2}$.
   Comme $\mathscr{A} = 0{,}5$, on a $bh = 2 \times 0{,}5 = 1$ donc $\boxed{h = \frac{1}{b}}$.
2. $b \in]0\ ;\ = \infty[$; Sur cet intervalle, la fonction inverse est décroissante, donc h décroît quand h croît.
3. Puisque la fonction inverse est décroissante, $4 \leqslant b \leqslant 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{4}$.
   La valeur maximale de h est $\boxed{\frac{1}{4}}$.