2nde : correction du devoir sur feuille n° 2

I

1. (a) $x > 7$ équivaut à $\boxed{x \in]7\,;\,+\infty[}$

   (b) $-1 \leqslant x < 3$ équivaut à $\boxed{x \in [-1\,;\,3[}$

2. (a) Soient $I =]-\infty\,;\,5[$ et $J = [-12\,;\,7]$.
   $\boxed{I \cap J = [-12\,;\,5]}$ et $\boxed{I \cup J =]-\infty\,;\,7]}$

   (b) Soient $I =]-7\,;\,5[$ et $J = [2\,;\,3]$.
   J est inclus dans I ($J \subset J$) ;
   $\boxed{I \cap J = J = [2\,;\,3]}$ et $\boxed{I \cup J = I =]-7\,;\,5[}$

II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère l'expression

$$A(x) = 4(x+1)^2 - 9.$$

1. $A(x) = 4\left[x^2 + 2x + 1\right] - 9 = 4x^2 + 8x + 4 * 9$
   $= \boxed{4x^2 + 8x - 5}$.

2. On remarque que $A(x) = [2(x+1)]^2 - 3^2$, c'est-à-dire que $A(x)$ s'exprime sous la forme d'une différence de deux carrés ; on peut alors appliquer la troisième identité remarquable.
   $A(x) = a^2 - b^2$ avec $a = 2(x+1)$ et $b = 3$.
   $A(x) = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = [2(x+1)+3]\,[2(+1)-3]$
   $= (2x+2+3)(2x+2-3) = (2x+5)(2x-1)$ donc
   $\boxed{A(x) = (2x+5)(2x-1)}$.

3. Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   $A(x) = 0$ équivaut à $(2x+5)(2x-1) = 0$..
   Nous avons donc deux cas :
   - $2x + 5 = 0$ d'où $x = -\dfrac{5}{2}$.
   - $2x - 1 = 0$ d'où $x = \dfrac{1}{2}$

   L'équation $A(x) = 0$ a donc deux solutions :
   $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. On pose $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$.

   (a) Il faut que le dénominateur soir différent de 0 : l'ensemble de définition de B est donc
   $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

   (b) Pour $x \neq 1$, $b(x) = \dfrac{A(x)}{1-x} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$.
   Les solutions de $A(x) = 0$ appartiennent à $\mathscr{D}$ donc les solutions de l'équation
   $B(x) = 0$ sont les mêmes que celles de $A(x) = 0$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}}$.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3x^2 + 30x + 25.$$

1. $f(5) = -3 \times 5^2 + 30 \times 5 + 25 = -3 \times 25 + 150 + 25$
   $= -75 + 175 = \boxed{100}$.

   $f\left(1+\sqrt{2}\right)$
   $= -3\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 30\left(1+\sqrt{2}\right) + 25$
   $= -3\left(1 + 2\sqrt{2} + 2\right) + 30\left(1+\sqrt{2}\right) + 25$
   $= -3\left(3 + 2\sqrt{2} + 30\left(1+\sqrt{2}\right)\right) + 25$
   $= -9 - 6\sqrt{2} + 30 + 30\sqrt{2} + 25 = \boxed{46 + 24\sqrt{2}}$.

   $f\left(-\dfrac{5}{6}\right) = -3\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2 + 30 \times \left(-\dfrac{5}{6}\right) + 25$
   $= -3 \times \dfrac{25}{36} - 30 \times \dfrac{5}{6} + 25 = -\dfrac{3 \times 25}{3 \times 12} - \dfrac{6 \times 5 \times 5}{6} + 25$
   $= -\dfrac{25}{12} - 25 + 25 = \mathbb{N} - \dfrac{25}{12}$.

2. Pour tout x, $-3(x-5)^2 + 100$
   $= -3\left[x^2 - 10x + 25\right] + 100 = -3x^2 + 30x - 75 + 100$
   $= -3x^2 + 30x + 25 = f(x)$.
   Par conséquent : $\boxed{f(x) = -3(x-5)^2 + 100}$.

3. Antécédents de 101 :
   on résout 'équation $f(x) = 101$.
   $f(x) = 101$ équivaut à $-3(x-5)^2 + 100 = 104$ donc $-3(x-5)^2 = 1$.
   $-3(x-5)^2$ est négatif et 1 est strictement positif, donc il n'y a aucune solution : 101 n'a pas d'antécédent.

   Antécédents de 97 :
   on résout l'équation $f(x) = 97$.
   Cette équation s'écrit $-3(x-5)^2 + 100 = 97$ donc $-3(x-5)^2 = -3$ soit, après simplification par -3, $(x-5)^2 = 1$.
   On en déduit $(x-5)^2 - 1 = 0$, donc $(x-5)^2 - 1^2$ et on factorise en appliquant la troisième identité remarquable.
   $[(x-5)+1]\,[(x-5)-1] = 0$ donc $(x-4)(x-6) = 0$.
   Les solutions sont 4 et 6, donc les antécédents de 97 sont 4 et 6.

   Antécédents de -8 :
   on résout l'équation $f(x) = -8$.
   Cette équation s'écrit $-3(x-5)^2 + 100 = -8$ donc $-3(x-5)^2 = -108$ soit, après simplification par -3, $(x-5)^2 = 36$.
   On en déduit $(x-5)^2 - 36 = 0$, donc $(x-5)^2 - 6^2$ et on factorise en appliquant la troisième identité remarquable.

$[(x-5)+6]\,[(x-5)-6]=0$ donc $(x+1)(x-11)=0$.
Les solutions sont -1 et 11, donc les antécédents de 97 sont -1 et 11.

IV

- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\sqrt{5}^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=5-2\sqrt{10}+5$
  $=\boxed{7-2\sqrt{10}}$.
- $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$
  $=18-6\sqrt{6}+3=\boxed{21-6\sqrt{6}}$

V

Soit le nombre $A=2+3\sqrt{2}$.
$A^2=\left[2+3\sqrt{2}\right]^2=2^2+2\times2\times3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2$
$=4+12\sqrt{2}+18=\boxed{22+12\sqrt{2}}$.

$A^2=A^2\times A=\left(22+12\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$
$=22\times2+22\times3\sqrt{2}+12\sqrt{2}\times2+12\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$
$=44+66\sqrt{2}+24\sqrt{2}+72=\boxed{116+90\sqrt{2}}$.

VI

1. f est définie sur $\boxed{I=[-2\,;\,4,5]}$.
2. - $f(-1)=2$
   - $f(1)=-1,5$
   - $f(2)=0$
   - $f(4,5)=2$.
3. Pour trouver les antécédents de 1, on cherche les abscisses de tous les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1.
   Les antécédents de 1 sont -1,5, environ -0,3 et environ 2,3.

   De même, les antécédents de 0 sont -1,8, 0 et 2.
4. Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les antécédents de 0, donc les réponses trouvées précédemment : -1,8, 0 et 2.
5. Les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont les antécédents de 2. $\boxed{\mathscr{S}=\{-1\,;\,2,5\,;\,4,5\}}$.
6. Aucun pour de la courbe n'a une ordonnée égale à 4, donc 4 n'a **aucun** antécédent par f.
7. $0\leqslant f(x)\leqslant1$ a pour solutions
   $\boxed{\mathscr{S}=[-1,8\,;\,-1,5]\cup[-0,3\,;\,0]\cup[2\,;\,2,3]}$.
8. Tableau de variation de f :

x	-2		-1		1		$3,8$		$4,5$
$f(x)$	-1	↗	2	↘	$-1,5$	↗	$3,4$	↘	2

9. Le minium de f est -1,5 t il est atteint pour $x=1$.

VII Une histoire de format

On considère des rectangles de longueur L et de largeur ℓ tels que, si l'on plie l'un d'eux, comme l'indique la figure, on obtient deux rectangles superposables et de même proportion que le précédent. Cela signifie que le rapport longueur/largeur est le même.

1. (a) On doit avoir $\dfrac{L}{\ell}=\dfrac{\ell}{\frac{\ell}{L}}$ d'où $\dfrac{L}{\ell}=\dfrac{2\ell}{L}$ donc $\boxed{L^2=2\ell^2}$.

   (b) On en déduit $\left(\dfrac{L}{\ell}\right)=2$ d'où $\boxed{\dfrac{L}{\ell}=\sqrt{2}}$ (car ce quotient est positif, puisque c'est un quotient de longueurs).
2. **Application numérique**
   Soit une feuille rectangulaire de 1 m^2 (format A_0), respectant la propriété ci-dessus (voir 1.)

   (a) Puisque l'aire vaut 1, on a $L\ell=1$ et, comme $\dfrac{L}{\ell}=\sqrt{2}$, on a $\ell^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\ell=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}}$.
   De même $\boxed{L=\sqrt{\sqrt{2}}}$.

   (b) En nommant L_4 et ℓ_4 les longueur et largeur du format A_4, on obtient :
   $\boxed{L_4=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4}}$ et $\boxed{\ell_4=\dfrac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}}}}$.
   On obtient $L_4\approx0,21$ m et $\ell_4\approx0,297$ m qui sont les valeurs habituelles (approchées) que l'on retient pour le format A_4.