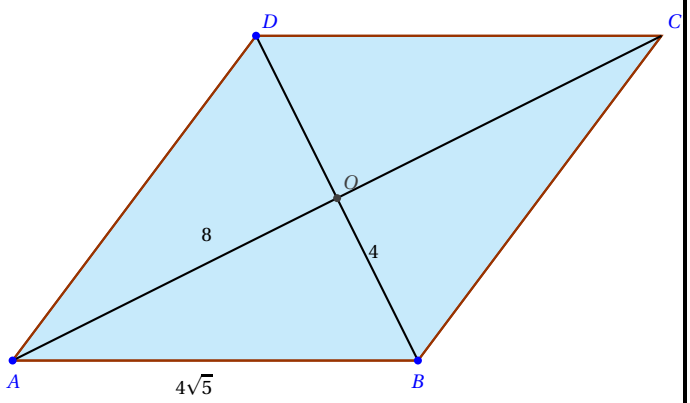
# $2^{2nde}$ : devoir sur feuille

## I




$AO^2 = 8^2 = 64$ ; $AB^2 = (4\sqrt{5})^2 = 4^2 \times \sqrt{5}^2 = 16 \times 5 = 80$ ; $OB^2 = 4^2 = 16$.
$AO^2 + OB^2 = 64 + 16 = 80 = AB^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AOB est rectangle en O.
$ABCD$ est un parallélogramme qui a des diagonales perpendiculaires : c'est donc un **losange**.

## II

$ABC$ est rectangle en $A$ ; $AB = 3$ ; $AC = 4$ ; $H$ est le pied de la hauteur du triangle $ABC$ issue de $A$.

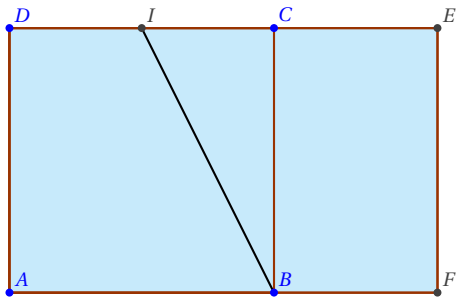
1. $ABC$ est un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ donc $BC = \sqrt{25} = 5$.
2. L'aire du triangle rectangle $ABC$ est $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$.
   On a aussi : $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{5AH}{2}$.
   On en déduit : $\dfrac{5AH}{2} = 6$ donc $\boxed{AH = \dfrac{12}{5}}$.

## III

$IJ^2 = \left(3 + 2\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + 12\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2$
$= 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$.
$JK^2 = \sqrt{78}^2 = 78$.
$IK^2 = \left(3\sqrt{5} - 2\right)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 2 + 2^2$
$= 45 - 6\sqrt{5} + 4 = 49 - 12\sqrt{5}$.
On a : $IJ^2 + IK^2 = 29 + 12\sqrt{5} + 49 - 12\sqrt{5} = 78 = IK^2$.
D'après le théorème de Pythagorte, le triangle $IJK$ est rectangle en J.

## IV Rectangle d'or

1. Figure :

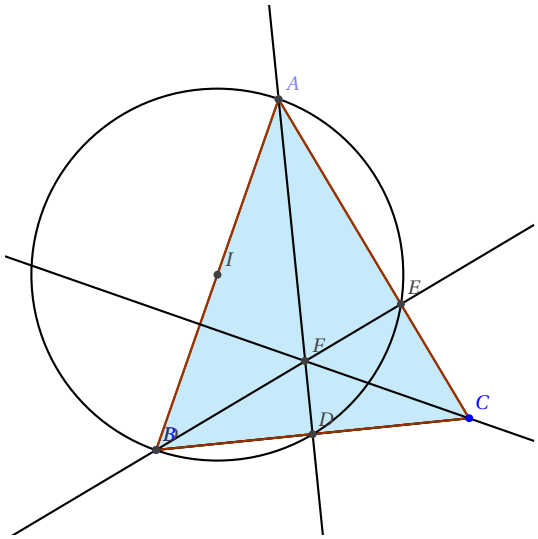



2. voir figure
3. Le côté du carré ABCD est $a$ ; $CI = \dfrac{a}{2}$ ; en appliquant le théorème de Pythagore, on a
   $IB^2 = IC^2 + CB^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4}$
   d'où $IB = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ après simplification.
   On en déduit $IE = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
   La longueur du rectangle vaut alors $DE = DI + IB = \dfrac{a}{2} + a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   Le nombre $\varphi$ vaut alors : $\varphi = \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{\dfrac{a}{2} + a\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{a} = \dfrac{a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a} = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$
4. $\varphi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2(3+\sqrt{5})}{2} \times 2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   $1 + \varphi = 1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   On en déduit que $\varphi^2 = 1 + \varphi$.
5. $\varphi^2 = 1 + \varphi$ donne $\varphi^2 - \varphi = 1$ d'où $\varphi(\varphi - 1) = 1$ et donc $\varphi - 1 = \dfrac{1}{\varphi}$ en divisant par $\varphi$.
6. $\varphi$ a servi essentiellement en architecture et peinture (voir par exemple ici).

## V

ABC est un triangle isocèle en A. Le cercle $\mathscr{C}$, de diamètre [AB], coupe [BC] en D et [AC] en E. La perpendiculaire è (AB) passant par C coupe la droite (BE) en F.

1. Figure.




2. (a) E et D appartiennent au cercle de diamètre [AB], donc AEB et ADB sont deux triangles rectangles, respectivement en E et D.

   (b) Comme AED est rectangle en E, (DE) est une hauteur du triangle ABC ; par construction, la droite passant par C et perpendiculaire à [AB] est aussi une hauetr de ABC. F est donc l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC, donc F est l'orthocentre de ABC.

   (c) Comme ABD est rectangle en D, (AD) est la troisième hauteur du triangle ABC. Comme ABC est isocèle en A, c'est aussi la médiatrice de ABC issue de A.

3. (a) Comme (AD) est une hauteur du triangle ABC, (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

   (b) F est l'orthocentre du triangle ABC, donc F appartient à la troisième hauteur (AD) du triangle ABC ; les trois points A, F et D sont donc alignés.
   Les droites (AD) et (AF) sont confondues, donc (AF) est la médiatrice de (AB).