2nde : devoir sur feuille n° 2

Il s'agit d'un travail rédigé ; penser à mettre en valeurs vos résultats et à faire attention au soin.
Chaque réponse doit être justifiée.

I

1. Traduire sous forme d'appartenance à un intervalle les inégalités suivantes :
   (a) $x > 7$
   (b) $-1 \leqslant x < 3$
2. Dans chaque cas, donner sous la forme la plus simple possible l'intersection $I \cap J$ et la réunion $I \cup J$ des intervalles I et J :
   (a) $I =]-\infty\,;\,5[$ et $J = [-12\,;\,7]$
   (b) $I =]-7\,;\,5[$ et $J = [2\,;\,3]$

II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère l'expression

$$A(x) = 4(x+1)^2 - 9.$$

1. Développer $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$.
4. On pose $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des valeurs de x pour lesquelles $B(x)$ existe (ensemble de définition).
   (b) Résoudre l'équation $B(x) = 0$.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3x^2 + 30x + 25.$$

1. Calculer les images de 5, de $1+\sqrt{2}$ et de $-\dfrac{5}{6}$.
2. Montrer que, pour tout x : $f(x) = -3(x-5)^2 + 100$.
3. Déterminer les antécédents éventuels de 101, de 97 et de -8.

IV

Développer et réduire les expressions suivantes :

- $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$
- $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$

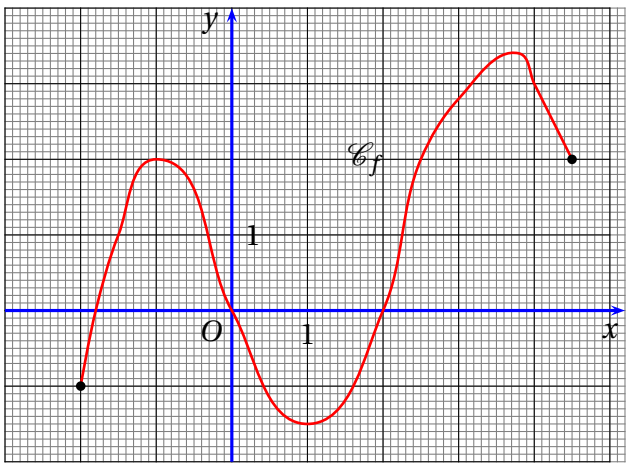
V

Soit le nombre $A = 2 + 3\sqrt{2}$.
Exprimer sous le forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres entiers les nombres A^2 et A^3.

VI

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction (voir ci-dessous).

1. Sur quel intervalle I la fonction est-elle définie ?
2. Quelle est l'image par f de -1 ? de 1 ? de 2 ? de 4,5 ?
3. Quels sont les antécédents de 1 ? Expliquer votre méthode.
   Quels sont les antécédents de 0 ? Expliquer votre méthode.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Expliquer votre méthode.
   Quelles sont ces solutions ?
5. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 2$? Expliquer
6. Combien l'équation $f(x) = 4$ a-t-elle de solutions ? Expliquer votre méthode.
7. Donner à partir du graphique les abscisses des points dont l'ordonnée vérifie $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
8. Dresser le tableau de variations de f.
9. Déterminer le minimum de f et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

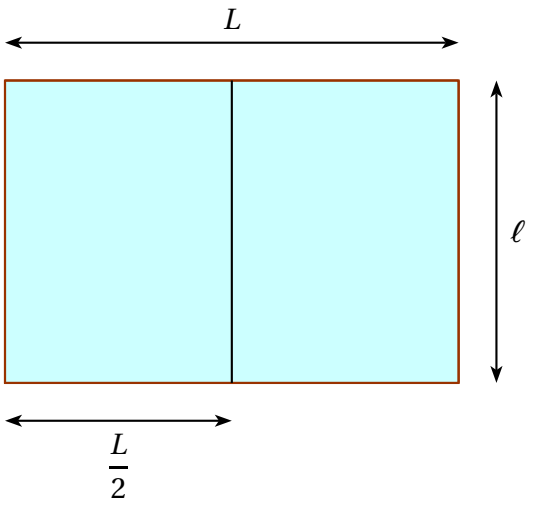


VII Une histoire de format

On considère des rectangles de longueur L et de largeur ℓ tels que, si l'on plie l'un d'eux, comme l'indique la figure, on obtient deux rectangles superposables et de même proportion que le précédent. Cela signifie que le rapport longueur/largeur est le même.

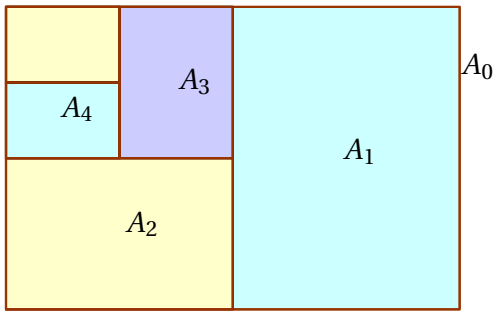
1. (a) Montrer que, dans ces conditions, l'on a : $L^2 = 2\ell^2$.

   (b) En déduire la valeur du quotient $\dfrac{L}{\ell}$.



2. **Application numérique**

   Soit une feuille rectangulaire de 1 m^2 (format A_0), respectant la propriété ci-dessus (voir 1.)

   (a) Quelles sont ses dimensions ?

   (b) En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles de format A_1,puis en coupant cette dernière feuille en deux, on obtient deux feuilles de format A_2, etc. (voir figure)
   Quelles sont les dimensions d'une feuille A_4 ? Donner les valeurs exactes puis approchées.
   Ces dimensions vous sont-elles familières ?