Un peu de logique

I L'implication

Considérons l'énoncé suivant :
« Si ABC est un triangle isocèle en A, alors les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux. »
Cet énoncé affirme ceci : s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, alors il est vrai que les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.
Autrement dit : lorsque la proposition (P) (c'est-à-dire l'affirmation (P)) : « ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la proposition (Q) : « les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux » est vraie aussi.
On dit que $\boxed{\text{(P) implique (Q)}}$.

Plus généralement, dire que la proposition (P) implique la proposition (Q) signifie que lorsque (P) est vraie alors (Q) est vraie, ou encore que (Q) est une conséquence de (P). On note (P) $\Rightarrow$ (Q) pour dire : si (P) est vraie, alors (Q) est vraie (on dit aussi que (P) est une condition suffisante pour avoir (Q)).

Exemples :

1. Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$
   Écrire cette cette implication en utilisant le symbole $\Rightarrow$.
2. Si la fonction f est croissante sur $[1\,;\,2]$, alors $f(1) \leqslant f(2)$.
   Écrire cette cette implication en utilisant le symbole $\Rightarrow$.
3. Écrire une implication liant un triangle équilatéral et les longueurs des côtés du triangle.
4. La phrase « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit » est-elle une implication ?

II L'implication réciproque

Considérons les propositions (P) et (Q) suivantes :

- (P) : $x = 2$
- (Q) : $x^2 = 4$.

Nous savons que (P) implique (Q) ((P) $\Rightarrow$ (Q)).
Nous pouvons nous poser le problème de savoir si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si (Q) implique (P).
Cette réciproque s'énonce : si $x^2 = 4$ alors $x = 2$.
Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice :

Écrire les réciproques des implications précédentes et préciser si elles sont vraies ou fausses.

III L'équivalence

Lorsque (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P), l'implication et sa réciproque sont vraies, on dit alors que les deux propositions (P) et (Q) sont équivalentes. On dit : (P) équivaut à (Q) ou encore : (P) si et seulement si (Q).
On note (P) $\Leftrightarrow$ (Q) pour dire (P) si et seulement si (Q) ou encore (P) équivaut à (Q).

Exemples :

1. ABC rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$: le théorème de Pythagore et sa réciproque nous fournissent une équivalence.
2. $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

IV Montrer que c'est vrai, montrer que c'est faux

Exemple 1 :
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = (x-1)^2.$$

Ces deux fonctions sont-elles égales ?
Cette question sous-entend :
A-t-on $f(x) = g(x)$ pour **tout** réel x ?
Pour prouver que $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas égales pour **tout** réel x, il suffit de trouver un x pour lequel c'est faux.
Compléter :
Pour $x = \cdots$
On a $f(x) = \cdots$
$g(x) = \cdots$
Donc :

Exemple 2 :
Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (x-1)(x+3) \text{ et } v(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Ces deux fonctions sont-elles égales ?
Cette question sous-entend : a-t-on $u(x) = v(x)$ pour tout réel x ?
Pour prouver qu'elles sont égales pour tout x, il faut (il est impératif de) développer $u(x)$ et trouver comme résultat l'expression $v(x)$:

Conclusion :

1. Pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber un cas pour lequel elle n'est pas vraie : on parle de **contre-exemple**.
2. Pour prouver qu'une affirmation est vraie, il faut (il est nécessaire de) faire le calcul pour un x quelconque.

Exercice : Les phrases suivantes sont fausses. Le prouver en trouvant un contre-exemple.

a) Pour tout réel x, $\sqrt{x}$ est un nombre irrationnel.

b) Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = x$.

c) L'inverse d'un nombre non nul est inférieur ou égal à 1.

d) Si la fonction f est telle que $f(1) > f(2)$ alors f est décroissante sur $[1\,;2]$.

V La négation d'une phrase

Intuitivement, indiquer pour chaque phrase suivante, la phrase qui correspond à sa négation :

1. Cet élève est calme et attentif.
   (a) Cet élève est agité et attentif.
   (b) Cet élève est calme et inattentif.
   (c) Cet élève est agité ou inattentif.
   (d) Cet élève est agité ou attentif.
2. Il y aura du fromage ou du dessert.
   (a) Il y aura du fromage et pas de dessert.
   (b) Il y aura du dessert et pas de fromage.
   (c) Il n'y aura pas de fromage et pas de dessert.
   (d) Il n'y aura pas de fromage ou pas de dessert.
3. Dans ce village tous les chats sont noirs.
   (a) Dans ce village, tous les chats sont blancs.
   (b) Dans ce village, aucun chat n'est noir.
   (c) Dans ce village, il y a au-moins un chat qui n'est pas noir.
   (d) Dans ce village, il y a au-moins un chat blanc.

Les règles de négation sont les suivantes :

- La négation de « A et B » est « non-A ou non-B ».
- La négation de « A ou B » est « non-A et non-B ».
- La négation de « Tous … A » n'est pas « Aucun … A » mais « Il existe au-moins un » non-A ».

VI La contraposée

Considérons les propositions (P) et (Q) suivantes :

- (P) : ABC est un triangle rectangle en A
- (Q) : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

On sait que si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$, c'est-à-dire : (P) $\Rightarrow$ (Q).
Si on sait que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, que peut-on affirmer pour le triangle ABC ?
Dire (P) $\Rightarrow$ (Q) est équivalent à dire non-(Q) $\Rightarrow$ non-(P). La phrase non-(Q) $\Rightarrow$ non-(P) est la contraposée de la phrase (P) $\Rightarrow$ (Q).

Pour démontrer que (P) $\Rightarrow$ (Q), on peut montrer que non-(Q) $\Rightarrow$ non-(P), c'est-à-dire sa contraposée.

Exercice :
Écrire la contraposée des phrases suivantes :

1. S'il pleut, je sors mon parapluie.
2. Quand mon chat n'est pas content, il griffe.
3. Si le triangle ABC est rectangle en A alors l'angle A est droit.