

2^{nde} : correction duTD n° 5 (milieux, distances)

Dans toute la feuille, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Exercice I

On considère les points $A(2 ; -3)$ et $B(7 ; 1)$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25+16} = \boxed{\sqrt{41}}$$

Exercice II

- 1) La médiatrice d d'un segment $[AB]$ est la droite qui coupe le segment $[AB]$ en son milieu.
- 2) Si M appartient à d , on a $MA = MB$.
- 3) Soient trois points A , B et M distincts tels que $MA = MB$.
Alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$.
- 4) Soient $A(1 ; 1)$, $B(6 ; 4)$ et $M(8 ; -5)$.

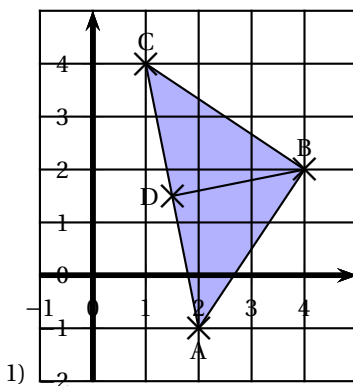
$$\bullet MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(8-1)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}; \quad \boxed{MA = \sqrt{85}}$$

$$\bullet MB = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{(8-6)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-9)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}; \quad \boxed{MB = \sqrt{85}}$$

$MA = MB$ donc M appartient à la médiatrice de $[AB]$

Exercice III

On considère les points $A(2; -1)$, $B(4 ; 2)$ et $C(1 ; 4)$.



$$2) \bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$$

$$\bullet BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$$

$$\bullet AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$$

- 3) $\bullet AC^2 = \sqrt{26}^2 = 26$
 $\bullet AB^2 + BC^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 = 13 + 13 = 26$
 $\bullet AC^2 = AB^2 + BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
 De plus, $AB = BC = \sqrt{13}$ donc le triangle ABC est **isocèle rectangle**

$$4) \bullet x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$$

D a pour coordonnées $\boxed{D\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)}$.

- 5) D est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC donc D est le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets).

On en déduit que $DB = DC = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

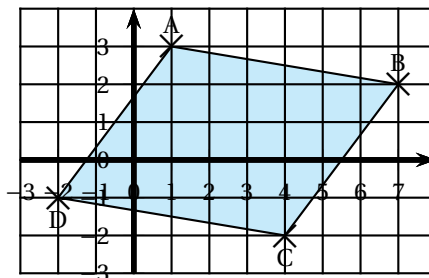
$$\bullet BC^2 = \sqrt{13}^2 = 13$$

$$\bullet DB^2 + DC^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} + \frac{26}{4} = \frac{52}{4} = 13.$$

- On a alors $BC^2 = DB^2 + DC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, DBC est rectangle en D.

Exercice IV

On considère les points $A(1; 3)$, $B(7; 2)$, $C(4; -2)$ et $D(-2; -1)$.

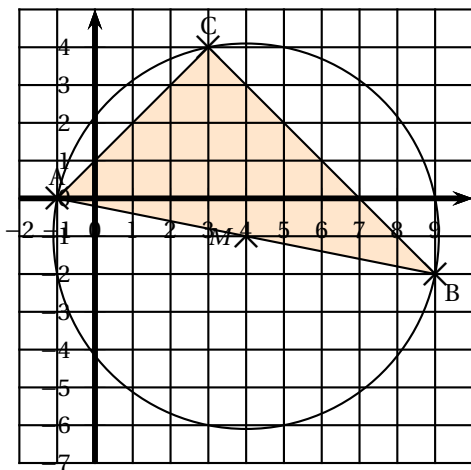


- Soit M le milieu de $[AC]$: $M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ donc $M\left(\frac{1+4}{2}; \frac{3+(-2)}{2}\right)$ d'où $M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 - Soit M' le milieu de $[BD]$: $M'\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right)$ donc $M'\left(\frac{7+(-2)}{2}; \frac{2+(-1)}{2}\right)$ d'où $M'\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- M et M' ont les mêmes coordonnées donc $M = M'$.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : c'est un **parallélogramme**.

Exercice V

On considère les points $A(-1; 0)$, $B(9; -2)$, et $C(3; 4)$.

1) Figure :



- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(9 - (-1))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{10^2 + (-2)^2} = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104}$
 - $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 9)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$
- $AB^2 = 104$; $AC^2 + BC^2 = 72 + 32 = 104$.
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

3) On considère le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre, $[AB]$.

Notons M le milieu de $[AB]$:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ donc } M(4; -1).$$

$$\text{Le rayon du cercle est } r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{104}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 26}}{2} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26}; \quad r = \sqrt{26}.$$

- Première méthode : $MC = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} = r$ donc M appartient à ce cercle.
 - ABC est un triangle rectangle, donc son cercle circonscrit (cercle passant par les trois sommets) a pour centre le milieu de l'hypoténuse, donc le cercle de centre M et de rayon $r = \sqrt{26}$; C appartient donc à ce cercle.