Correction du TD nº 12 (valeur absolue)

Exercice I

Rappel : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Déterminer la valeur du nombre proposé (en expliquant).

1) $|\pi - 2| = \boxed{\pi - 2}$ car $\pi - 2 > 0$
2) $|-23| = \boxed{23}$ car $23 < 0$
3) $|\sqrt{6} - 5| = -\left(\sqrt{6} - 5\right) = \boxed{5 - \sqrt{6}}$ car $\sqrt{6} - 5 < 0$
4) $|\pi - 5| = -(\pi - 5) = \boxed{5 - \pi}$ car $\pi - 5 < 0$
5) $|\sqrt{3} - 3| = -\left(\sqrt{3} - 3\right) = \boxed{3 - \sqrt{3}}$ car $\sqrt{3} - 3 < 0$
6) $\left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right| = \boxed{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ car $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$
7) $\left|\sqrt{5} - \sqrt{7}\right| - \left(\sqrt{5} - \sqrt{7}\right) = \boxed{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ car $\sqrt{5} - \sqrt{7} < 0$

Exercice II

Résoudre les équations suivantes :

1) $|x| = 7$; $\boxed{\mathscr{S} = \{-7\ ;\ 7\}}$ car la distance de x à 0 doit être égale à 7.
2) $|x| = \sqrt{2}$.
   La distance de x à 0 doit être égale à $\sqrt{2}$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right\}}$
3) $|x| = -3$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$ car la valeur absolue d'un nombre ne peut pas être négative.

Exercice III

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $|x - 2| = 5$;
   La distance de x à 2 doit être égale à 5.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\ ;\ 7\}}$
2) $|x - 12| = 7$
   La distance de x à 12 doit être égale à 7.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{5\ ;\ 10\}}$
3) $|x + 2| = 7$ (remarque : $x + 2 = x - (-2)$)
   La distance de x à -2 doit être égaler à 7.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-9\ ;\ 5\}}$
4) $|x - 13| = 14$
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 27\}}$

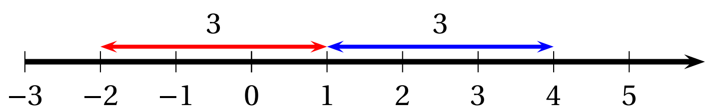
5) $|x-1|=14$ $\boxed{\mathscr{S}=\{-13\,;\,15\}}$

6) $|x-6|=-3$
$\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$ car la valeur absolue d'un nombre ne peut pas être négative.

Exercice IV

Résoudre :

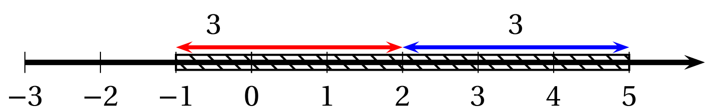
1) $|x-3|\leqslant 1$



La distance de x à 3 doit être inférieure ou égale à 1, donc on ne peut pas s'éloigner de plus de trois unités de 1.

Tous les nombres compris entre -2 et 4 conviennent $\boxed{\mathscr{S}=[-2\,;\,4]}$

2) $|x-2|\geqslant 3$
La distance de x à 2 doit être supérieure ou égale à 3. Il faut s'éloigner de plus de 3 unités de 2.



x doit être à plus de 3 unités de 2 donc ne doit pas être dans la partie hachurée.
$\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-1]\cup[5\,;\,+\infty[}$