Correction du TD n° 20 (inéquations-produits)

Exercice I

a) $3x+5 \leqslant 0 \iff 3x \leqslant -5 \iff x \leqslant -\dfrac{5}{3}$

b) $5x-7 \leqslant 0 \iff 5x \leqslant 7 \iff x \leqslant \dfrac{7}{5}$

c) Complétons le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
Signe de $3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $5x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(3x+5)(5x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) D'après le tableau : $(3x+5)(5x-7) \geqslant 0 \iff \boxed{x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{3}\right] \cup \left]\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty\right[}$

Exercice II

a) Résoudre : $(-2x+1)(6x+5) > 0$

- Étude du signe de $(-2x+1)$:
  $-2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
  $-2x+1 > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ (l'inégalité change de sens car on divise par -2, négatif).
- Étude du signe de $6x+5$:
  $6x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{6}$
  $5x+5 > 0 \Leftrightarrow 6x > -5 \Leftrightarrow x > -\dfrac{6}{5}$
- **Tableau de signes :**

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $6x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-2x+1)(6x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Conclusion** : le produit est Strictement positif sur $\left]-\dfrac{5}{6}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$: $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\dfrac{5}{6}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[}$

b) Résoudre : $(2-3x)(4x-1) \leqslant 0$

- Étude du signe de $2-3x$:
  $2-3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$
- $x : x \mapsto 2-3x$ est une fonction affine décroissante puisque le coefficient directeur -3 est négatif.
  Elle prend d'abord des valeurs positives puis négatives, donc $2-3x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$
- Étude du signe de $4x-1$.
  $4x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$
  $4x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$ (en résolvant l'inéquation en regardant le signe de la fonction affine croissante)

- **Tableau de signes :**

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $2-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $4x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(2-3x)(4x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[}$

c) Résoudre : $(5x-3)(2x+1) > (2x+1)(x-4)$

- $(5x-3)(2x+1) > (2x+1)(x-4) \Leftrightarrow (5x-3)(2x+1)-(2x+1)(x-4) > 0$
  $\Leftrightarrow (2x+1)\left[(5x-3)-(x-4)\right] > 0$
  $\Leftrightarrow (2x+1)(4x+1) > 0$
- **Tableau de signes :**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$

d) $\dfrac{3x-4}{2x+3} \geqslant 0$ (trouver d'abord l'ensemble de définition)

- La valeur interdite est $x = -\dfrac{3}{2}$ donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
- On renseigne un tableau de signes comme pour un produit; il faut juste faire attention à la valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	||	$-$	|	$+$	
$\frac{3x-4}{2x+3}$		$+$	||	$-$	|	$+$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\cup \left[\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[}$

e) $\dfrac{1-4x}{x-3} \leqslant -3$

- La valeur interdite est 3.
- Pour $x \neq 3$, $\dfrac{1-4x}{x-3} \leqslant -3 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x}{x-3}+3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x+3(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-8}{x-3} < 0$
- **Tableau de signes :**

x	$-\infty$		-8		3		$+\infty$
$-x-8$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$\frac{-x-8}{x-3}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-8] \cup]3\,;\,+\infty[}$