2$^{\text{nde}}$: TD n° 18 sur les vecteurs (colinéarité)

Exercice I

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.
   Sont-ils colinéaires ?
2. Même question avec $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{7}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\\sqrt{7}+1\end{pmatrix}$ (calculer le déterminant des deux vecteurs).

Exercice II

On considère, dans un repère, les points $A(-2\,;\,3)$, $B(2\,;\,1)$ et $C(4\,;\,0)$
.

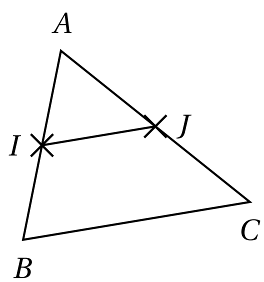
a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le déterminant de ces deux vecteurs.

c) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice III

ABC est un triangle quelconque. I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.



1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$

2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$

3) (a) Compléter : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{I\cdots} + \overrightarrow{\cdots J}$

   (b) En déduire une relation entre le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

   (c) À quelle propriété vue au collège cela vous fait-il penser ?

Exercice IV

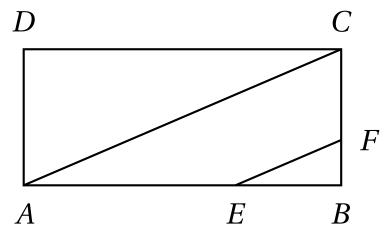
Soit $[AB]$ un segment. On veut construire le point D tel que $\overrightarrow{DA} + 4\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.
Montrer que cette égalité se transforme en

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Construire alors le point D.

Exercice V Trois méthodes pour montrer le même résultat

Soit ABCD un rectangle. Soit E le point du segment [AB] tel que $\text{AE} = \frac{2}{3}\text{AB}$ et le point F du segment [BC] tel que $\text{BF} = \frac{1}{3}\text{BC}$.



Méthode 1 : solution analytique

1. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}})$, quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E, F ?
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{EF}}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Méthode 2 : solution vectorielle

Démontrer (à l'aide de la relation de Chasles) que $\overrightarrow{\text{EF}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}$. (indication : faire intervenir le point B)
Que peut-on en déduire pour les droites (EF) et (AC) ?

Méthode 3 : utilisant les configurations

En utilisant la réciproque du théorème de Thalès, démontrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

Exercice VI

On considère trois points A , B et C non alignés d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1) Construire les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

2) On munit le plan d'un nouveau repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

   (a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, E et D dans ce repère.

   (b) Les droites (DE) et (CA) sont-elles parallèles ?