2^{nde} : Correction du TD nº 14 (factorisations)

Exercice I

Factoriser les expressions suivantes :

a) $4x^2+4xy+y^2=(2x)^2+2\times 2x\times y+y^2=a^2+2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a=2x \\ b=y \end{cases}$

$=(a+b)^2=(2x+y)^2$ donc $\boxed{4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2}$

b) $16x^2-8x+1=(4x)^2-2\times 4x\times 1+1^2=a^2 2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a=4x \\ b=1 \end{cases}$

$=(a-b)^2=(4x-1)^2$ donc $\boxed{16x^2-8x+1=(4x-1)^2}$

c) $4x^2-y^2=(2x)^2-y^2=a^2-b^2$ avec {

$=(a+b)(a-b)=(2x+y)(2x-y)$ donc $\boxed{4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)}$

d) $25-4x^2=5^2-(2x)^2=\boxed{(5+2x)(5-2x)}$

e) $64x^2-121=(8x)^2-11^2=\boxed{(8x+11)(8x-11)}$

f) $256x^2+384x+144=16\left(16x^2+24x+9\right)=16\left[(4x)^2+2\times 4x\times 3+3^2\right]=\boxed{16\,(4x+3)^2}$

g) $(x+3)^2-4=(x+3)^-2^2=a^2-b-2$ avec $\begin{cases} a=(x+3) \\ b=2 \end{cases}$

$=(a+b)(a-b)=[(x+3)+2]=[(x+3)-2]=\boxed{(x+5)(x+1)}$

h) $(3x+8)^2-(5x+2)^2=a^2-b^2$ avec $\begin{cases} a=(3x+8) \\ b=(5x+2) \end{cases}$

$=[(3x+8)+(5x+2)]\,[(3x+8)-(5x+2)]=(3x+8+5x+2)(3x+8-5x-2)=\boxed{(8x+10)(-2x+6)}$.

On peut améliorer la factorisation :

$(8x+10)(-2x+6)=2(4x+5)\times 2(-x+3)=\boxed{4(4x+5)(-x+3)}$

Exercice II

Soit $E(x)=(3x-2)^2-81$.

1. $E(x)=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2-81=9x^2-12x+9-81=\boxed{9x^2-12x-77}$
2. Pour factoriser E, on part de la forme initiale ; on reconnait la différence de deux carrés.

   $E(x)=(3x-2)^2-81=(3x-2)^2-9^2=a^2-b^2$ avec $\begin{cases} a=(3x-2) \\ b=9 \end{cases}$

   $=(a+b)(a-b)=[(3x-2)+9)]\,[(3x-2)-9)]=\boxed{(3x+7)(3x-11)}$.

3. En choisissant la forme la mieux adaptée, calculer :

   (a) Pour calculer $E\left(\dfrac{2}{3}\right)$, on utilise la forme initiale :

   $E(x)=(3x-2)^2-81$ dnc $E\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(3\times\dfrac{2}{3}-2\right)^2-81=(2-2)^2-81=0-81=\boxed{-81}$

(b) Pour calculer $E\left(\frac{11}{3}\right)$, on utilise la forme factorisée :

$E(x) = (3x+7)(3x-11)$ donc $E\left(\frac{11}{3}\right) = (3\times\frac{11}{3}+7)(3\times\frac{11}{3}-11) = (11+7)(11-11) = 18\times 0 = \boxed{0}$.

(c) Pour calculer $E\left(\sqrt{2}\right)$, on utilise la forme développée :

$E(x) = 9x^2-12x-77$ donc $E\left(\sqrt{2}\right) = 9\times\sqrt{2}^2-12\sqrt{2}-77 = 9\times 2-12\sqrt{2}-77 = 18-12\sqrt{2}-77 =$ $\boxed{-59-12\sqrt{2}}$

(d) Pour calculer $E\left(-\frac{7}{3}\right)$, on utilise la forme factorisée :

$(3x+7)(3x-11)$ donc $E\left(-\frac{7}{3}\right) = (3\times\left(-\frac{7}{3}\right)+7)(3\times\left(-\frac{7}{3}\right)-11) = (-7+7)(-7+11) = 0\times(-7+11) = \boxed{0}$

Exercice III

On voudrait factoriser l'expression
$A(x) = x^2-5x+6$.

1. L'expression n'a aucun facteur commun et n'est pas une identité remarquable.
2. $x^2-5x+\frac{25}{4} = x^2-2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

   $= a^2+2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a = x \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

   $= (a+b)^2 = \boxed{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}$
3. On en déduit : $x^2+5x = x^2+5x = \boxed{\left(x+\frac{5}{2}\right)^{-}\frac{25}{4}}$
4. On en déduit : $x^2+5x+6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^{-}\frac{25}{4}+6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^{-}\frac{25}{4}+\frac{24}{4} = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
5. On reconnaît une différence de deux carrés :

   $x^2+54x+6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2-b^2$ avec $\begin{cases} a = \left(x+\frac{5}{2}\right) \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

   $= (a+b)(a-b) = \left[\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]$

   $= (x+3)(x+2)$.

   Par conséquent : $\boxed{x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)}$