

Vecteurs et translations (première partie)

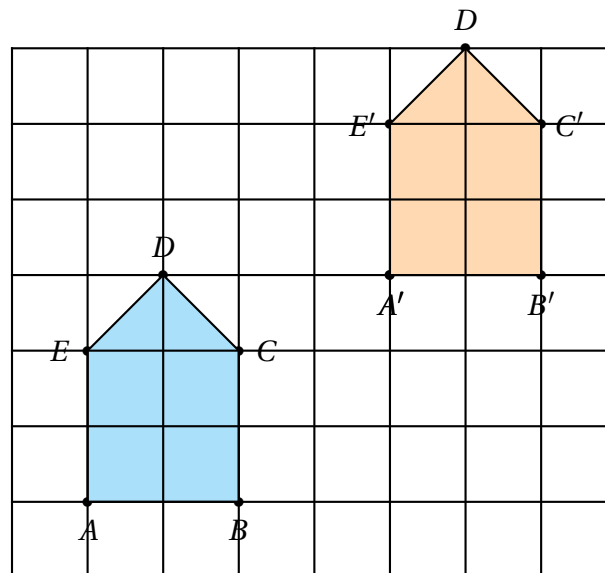
Table des matières

I	Translations	1
II	Vecteur d'une translation	2
III	Egalité de vecteurs	3
IV	Somme de deux vecteurs	4
V	Coordonnées d'un vecteur	5
VI	Norme d'un vecteur	7

Activité 1 page 196

I Translations

On considère un polygone $ABCDE$. On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation par rapport à la feuille de papier ou au tableau. Le sommet A vient en A' , B vient en B' et C vient en C' , D en D' et E en E' .



On dit qu'on a effectué une **translation** de la figure.

Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en **gardant la même orientation**.

II Vecteur d'une translation

Remarque : Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. On ne sait pas où la figure arrive!
Il faut préciser davantage.



Définition

En fait, puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de préciser le déplacement d'un **seul** point de la figure.

Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le triangle $A'B'C'$.

On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Remarque : on aurait pu dire que B allait en B' ou C en C'. La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$.

Représentation : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.



Vocabulaire

Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles.

Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** AB.



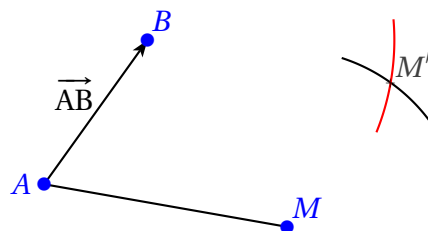
Définition

L'image d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :

- les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles);
- les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens**;
- les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur; $AA' = MM'$

L'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ se construit au compas si l'on ne peut pas utiliser le quadrillage de la feuille. En effet, $ABM'M$ est alors un parallélogramme, donc $AB = MM'$ et $AM = BM'$.

On trace l'arc de cercle de centre B et de rayon AC (car nous devons avoir $AC = BD$).
On trace l'arc de cercle de centre C et de rayon AB (car nous devons avoir $CD = AB$).



III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante;

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

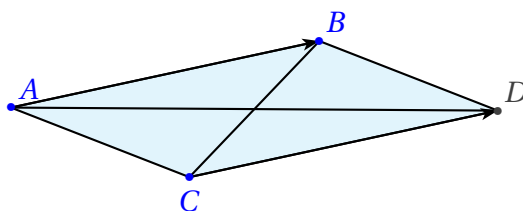
Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.



Remarque : si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\vec{u}$.



Propriétés

- $\vec{AB} = \vec{AC}$ si, et seulement si $B = C$.
- K est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si, $\vec{AK} = \vec{KB}$

Exercice : Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\vec{AB}$?
3. Conclure.

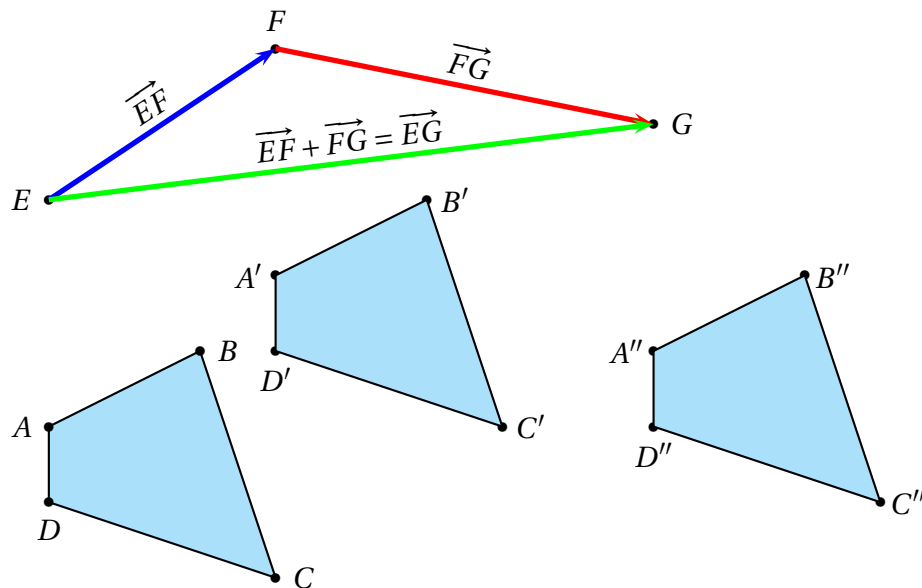
IV Somme de deux vecteurs

On considère un polygone ABCD.

Soient deux vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{FG}$.

$A'B'C'D'$ est l'image du polygone ABCD par la translation de vecteur $\vec{EF}$. $A''B''C''D''$ est l'image du polygone $A'B'C'D'$ par la translation de vecteur $\vec{FG}$.

On voit que faire subir successivement deux translations au polygone ABCD revient à effectuer une seule translation de vecteur $\vec{EG}$. On définit la somme de deux vecteurs comme le vecteur associé à la succession des deux translations caractérisées par ces deux vecteurs.



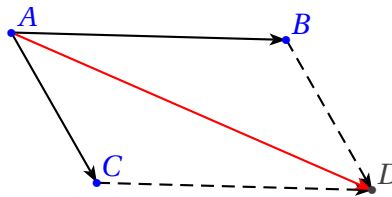
Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points E, F et G, on a : $\vec{EF} + \vec{FG} = \vec{EG}$

Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 à Épernon en Eure-et-Loir et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français, spécialisé en géométrie, notamment projective.

Pour plus de précisions cliquer [ici](#)

Somme de deux vecteurs de même origine : On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\vec{AB} + \vec{AC}$.



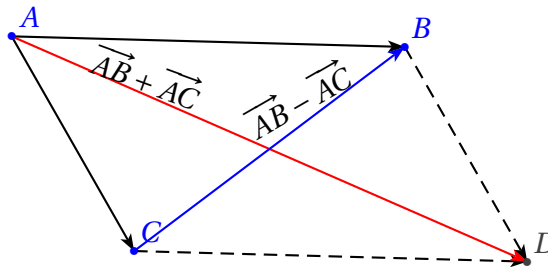
On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\vec{AB} = \vec{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir $AB = CD$ et $AC = BD$.

Alors : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ (**relation de Chasles**).

Remarque : En appliquant la relation de Chasles, on a : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$. Une translation de vecteur $\vec{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\vec{BA}$ correspond à une translation de vecteur $\vec{AA}$, qui laisse tous les points immobiles ; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Par conséquent : $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{CC} = \dots = \vec{0}$.

Comme $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\vec{BA} = -\vec{AB}}$.

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$. On voudrait représenter également $\vec{AB} - \vec{AC}$. On a : $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \boxed{\vec{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.



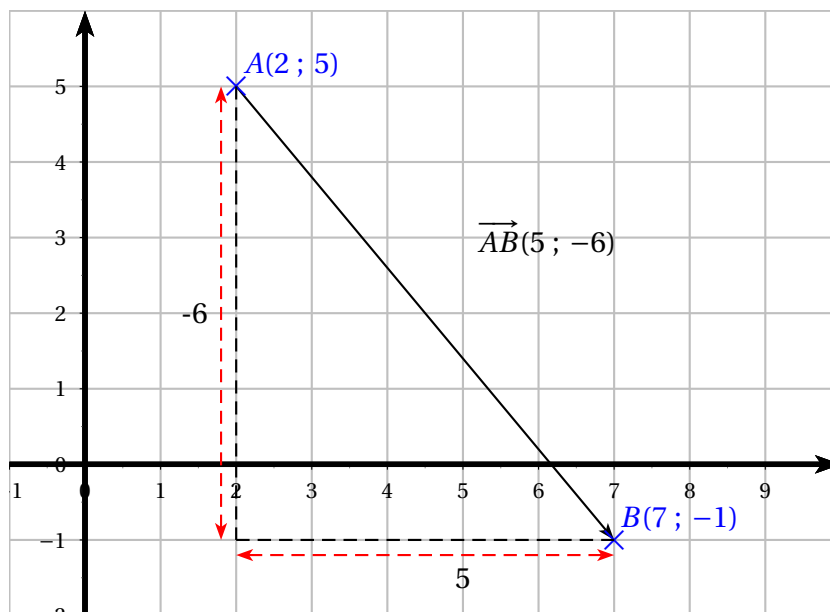
V Coordonnées d'un vecteur



Définition

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère quelconque. Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ et l'on écrit : $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : Les coordonnées d'un vecteur servent à savoir de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.



Remarque : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Applications

Exemple 1

Soient $A(1,2)$, $B(6,4)$, $C(5,1)$ et $D(0,-1)$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

On va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 1 = 5 \\ 4 - 2 = 2 \end{pmatrix} : \boxed{\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 - 0 = 5 \\ 1 - (-1) = 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \boxed{\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ puisqu'ils ont les mêmes coordonnées, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.

Exemple 2

Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :

Soient $A(2; 3)$, $B(3; 4)$ et $C(5; 6)$. On cherche les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

On note $D(x_D; y_D)$ les coordonnées de D .

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 6 - y_D \end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 6 - y_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \end{cases}.$$

D a pour coordonnées $\boxed{D(4; 5)}$

VI Norme d'un vecteur



Propriété

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère **orthonormal**. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

On appelle norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre noté $\|\overrightarrow{AB}\|$, longueur du segment $[AB]$.

On a alors : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple : $A(2; -5)$ et $B(-7; 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ donc : } AB = \sqrt{(-9)^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \boxed{\sqrt{117}}$$